

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Correzione della parte II.C del compito 17dic2014.

Es. 1.

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita da

$$x_0 = 8, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 2}{3}}$$

- (i) calcolare l'estremo inferiore e superiore della successione, specificando se si tratta di massimo e minimo;
- (ii) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

La funzione $f(x) := \sqrt{\frac{x^2+2}{3}}$ (che definisce la ricorsione) ha le proprietà seguenti:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari;
- (b) f è strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$;
- (c) $f(x) \geq f(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$;
- (d) $f(x) > x$ se $x \in [0, 1)$, $f(1) = 1$ e $f(x) < x$ per $x \in (1, +\infty)$;
- (e) $f : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$.

Le proprietà (a), (b), (c) sono di immediata verifica, la proprietà (d) segue da un semplice conto mentre la proprietà (e) è conseguenza della (c):

$$x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (f(1), +\infty) = (1, +\infty).$$

Sappiamo che $x_{n+1} = f(x_n)$; e visto che $f : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ e $x_0 = 8 \in (1, +\infty)$ possiamo facilmente dimostrare per induzione che

$$x_n \in (1, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Inoltre dalla proprietà (d) segue che $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$, cioè x_n è strettamente decrescente. Ne segue che $x_n \leq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$, e dunque

$$x_0 = \max\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

D'altronde x_n **non ha minimo** (perché x_n è strettamente decrescente) inoltre, posto $\ell := \inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ si ha che $\ell \leq x_0 = 8$, $\ell \geq 1$ (perché da (1) segue che 1 è un minorante) e $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ (perché una successione monotona decrescente converge al proprio estremo inferiore). Ma, per la continuità della funzione f il limite ℓ deve essere un punto fisso per f , cioè

$$f(\ell) = \ell.$$

Per la proprietà (d) l'unico valore positivo che soddisfa questa equazione è $\ell = 1$; pertanto

$$\inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

Es. 2.

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2 + \tan x} - \cos \sqrt{x + \sin x}}{x(\log \sin(5x) - \log(4x))}$$

Sottraendo e sommando 1 al numeratore possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2 + \tan x} - \cos \sqrt{x + \sin x}}{x(\log \sin(5x) - \log(4x))} &= \frac{[e^{x^2 + \tan x} - 1] + [1 - \cos \sqrt{x + \sin x}]}{x(\log \sin(5x) - \log(4x))} \\ &= \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \end{aligned}$$

dove

$$f(x) := e^{x^2 + \tan x} - 1, \quad g(x) := 1 - \cos \sqrt{x + \sin x}, \quad h(x) := x(\log \sin(5x) - \log(4x)).$$

Osserviamo ora che per $x \rightarrow 0^+$ si ha che

$$f(x) = e^{x^2 + \tan x} - 1 \sim x^2 + \tan x \sim x,$$

$$g(x) = 1 - \cos \sqrt{x + \sin x} \sim \frac{(\sqrt{x + \sin x})^2}{2} \sim \frac{x + \sin x}{2} \sim x$$

D'altra parte per $x \rightarrow 0^+$ si ha anche

$$h(x) = x(\log \sin(5x) - \log(4x)) = x \log \frac{\sin(5x)}{(4x)} \sim x \log \frac{5}{4}$$

Per il principio di sostituzione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \log \frac{5}{4}} = \frac{1}{\log \frac{5}{4}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \log \frac{5}{4}} = \frac{1}{2 \log \frac{5}{4}}$$

Quindi, per il teorema del limite della somma, il limite di partenza vale $\frac{2}{\log \frac{5}{4}}$.

Es. 3.

Si consideri la successione

$$x_n := \left(\frac{n+3}{n-3} \right)^{n^2}$$

(i) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

(ii) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} x_n$$

(i) Possiamo riscrivere la successione nel modo seguente

$$x_n = \exp\left(n^2 \log \frac{n+3}{n-3}\right);$$

per studiare il comportamento di x_n basta quindi studiare l'argomento dell'esponenziale.

Osserviamo che, per $n \rightarrow +\infty$ si ha

$$n^2 \log \frac{n+3}{n-3} = n^2 \log\left(1 + \frac{6}{n-3}\right) \sim \frac{6n^2}{n-3} \sim 6n.$$

Di conseguenza l'argomento dell'esponenziale diverge a $+\infty$ e $x_n \rightarrow +\infty$.

(ii) Procedendo come al punto precedente scriviamo

$$2^{-n} x_n := \exp\left(n^2 \log \frac{n+3}{n-3} - n \log 2\right). \quad (2)$$

Per quanto visto in precedenza si ha che, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$n^2 \log \frac{n+3}{n-3} - n \log 2 \sim n(6 - \log 2).$$

Dato che $\log 2 < 6$ si ha che l'argomento dell'esponenziale al membro destro dell'equazione (2) diverge a $+\infty$, pertanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} x_n = +\infty$.