

**Matematica Discreta e Algebra Lineare — 1° appello**  
A.A. 2014/15 — 9 giugno 2015

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: .....

Corso e Aula: .....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

**Esercizio 1.** Calcolare le soluzioni della seguente congruenza:

$$25x \equiv 2^{49} \pmod{17}.$$

Quante sono le soluzioni comprese tra 1 e 100?



**Esercizio 2.** Siano  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$  e  $B = \{1, 2, \dots, 20\}$ .

- a) Quante sono le funzioni  $f : A \rightarrow B$  iniettive?
- b) Quante sono le funzioni  $f : A \rightarrow B$  tali che l'immagine contiene solo numeri pari?
- c) Quante sono le funzioni  $f : A \rightarrow B$  strettamente crescenti?



**Esercizio 3.** Sia  $C: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi standard, è

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Trovare una base di  $U = \ker C$  e  $W = \operatorname{im} C$ .
- (b) Scrivere un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio  $W$ .



**Esercizio 4.** Sia  $B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'endomorfismo lineare la cui matrice, rispetto alla base standard, è

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che  $\lambda_1 = 1$  è un autovalore di  $B$  con molteplicità geometrica 3 e che questo permette di dire che il polinomio caratteristico si fattorizza come prodotto di polinomi irriducibili di grado 1.
- (b) Dire se esiste un altro autovalore di  $B$  diverso da 1. [Suggerimento: non occorre calcolare il polinomio caratteristico per rispondere, ci sono metodi molto più veloci.] L'endomorfismo  $B$  è diagonalizzabile?

