1 Calcolo Combinatorio

$$X = \{x_1, \dots, x_k\}, \quad |X| = \#X = k$$

$$Y = \{y_1, \dots, y_n\}, \quad |Y| = \#Y = n$$

- **Prodotto Cartesiano** $\quad X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

$$|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}| = |\mathbf{X}||\mathbf{Y}| = \mathbf{kn}$$

- $\big|\{\mathbf{f : X \longrightarrow Y \;\; f \text{ funzione}}\}\big| = |\mathbf{Y}|^{|\mathbf{X}|} = \mathbf{n^k}$

  infatti $\forall i = 1, \dots, k$ per $f(x_i)$ ha n possibili immagini.

  Questo risultato si può dimostrare formalmente per induzione su k :

  se $k = 1$ la tesi è ovvia.

  Supponiamo vera la tesi nel caso in cui il dominio abbia cardinalità k e dimostriamola nel caso in cui $|X| = k + 1$. Sia $x_0 \in X$; per ipotesi induttiva sappiamo che
  $\big|\{f : X \setminus \{x_0\} \longrightarrow Y \;\; f \text{ funzione}\}\big| = n^k$
  quindi

  $\big|\{f : X \longrightarrow Y\}\big| = (\text{numero d possibili immagini per } x_o) \cdot \big|\{f : X \setminus \{x_0\} \longrightarrow Y\}\big| = n \cdot n^k = n^{k+1}$

  CASO PARTICOLARE: $\quad |Y| = 2$ ad esempio $Y = \{0, 1\}$

  $$\big|\{f : X \longrightarrow \{0, 1\} \;\; f \text{ funzione}\}\big| = 2^k \tag{1}$$

  NOTAZIONE: $Y^X := \{f : X \longrightarrow Y \;\; f \text{ funzione}\}$

- L'insieme $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$ si dice **insieme delle parti di** X

  Proposizione 1.1. $\big|\mathcal{P}(\mathbf{X})\big| = \mathbf{2^k}$.

  Dim. Questo enunciato si pu' dimostrare per induzione su $k = |X|$ (provate a farlo!). Un'altra dimostrazione si basa sulla seguente osservazione:

  Osservazione 1.2. Due insiemi (finiti) hanno la stessa cardinalità se e soltanto se sono in corrispondenza biunivoca (infatti sono in corrispondenza biuniovoca con lo stesso sottoinsieme di $\mathbb{N}$).

  Se mostriamo che $\mathcal{P}(X)$ e $\{f : X \longrightarrow \{0, 1\} \;\; f \text{ funzione}\}$ sono in corrispondenza biunivoca, la tesi seguirà dall'osservazione appena fatta e da (1).

  Considero la funzione

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \{f : X \longrightarrow \{0, 1\}\} \\ & A & \mapsto & \varphi_A \end{array}$$

dove $\quad \varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$

Dimostro che:

F è ben definita, infatti $\forall A \subset X \;\; F(A) = \varphi_A \in Y^X$.

F è iniettiva: $\quad \forall A, B \subseteq X \;\; A \neq B \;\; \Rightarrow \;\; F(A) \neq F(B)$

$A \neq B$ significa che $A \not\subset B$ oppure $B \not\subset A$

$$\begin{array}{ccc} \text{ossia } \; \exists x \in A,\, x \notin B & \text{oppure} & \exists x \in B,\, x \notin A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_A(x) = 1 \; \varphi_B(x) = 0 & \text{o} & \varphi_B(x) = 1 \; \varphi_A(x) = 0 \end{array}$$

In entrambi i casi si ha $\quad \varphi_B \neq \varphi_A$

F è surgettiva: $\forall f : X \longrightarrow \{0,1\} \;\; \exists A \subset X$ tale che $F(A) = \varphi_A = f$

Prendo $\quad A = f^{-1}(1) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$

Proviamo che $\quad \varphi_A = f \quad$ cioè che $\forall x \in X \quad \varphi_A(x) = f(x)$.

Infatti

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$

La funzione F è quindi una corrispondenza biunivoca e

$$\left|\mathcal{P}(X)\right| = \left|\{f : X \longrightarrow \{0,1\} \;\; f \text{ funzione}\}\right| = 2^k.$$

$\square$

- $\left|\{\mathbf{f : X \longrightarrow Y \;\mid\; f \;\; iniettiva}\}\right| = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{se \;\; n < k} \\ \mathbf{n(n-1)\cdots(n-k+1)} & \mathbf{n \geq k} \end{cases}$

Infatti ho n scelte per x_1 , se $f(x_1) = y_i$ allora ho $n-1$ scelte per x_2 (in $Y \setminus \{y_i\}$), e così via, fino ad avere $(n-k+1)$ scelte per x_k (in $Y \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_{k-1})\}$).

Osservazione 1.3. $f : X \longrightarrow Y$ iniettiva corrisponde ad una scelta ordinata di k elementi **distinti** di Y

$$(f(x_1), \ldots, f(x_k))$$

CASO PARTICOLARE: se $n = k$

$f : X \longrightarrow Y \quad$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ è surgettiva $\Leftrightarrow$ è bigettiva

Se $Y = X$, $\quad \{f : Y \longrightarrow Y\} = S(Y) \quad$ sono le **permutazioni** di Y

$$|\mathbf{S(Y)}| = \mathbf{n!}$$

- $\#\{\mathbf{A} \subset \mathbf{Y} \ | \ |\mathbf{A}| = \mathbf{k}\} = \dfrac{\mathbf{n(n-1)\cdots(n-k+1)}}{\mathbf{k!}}$

  Infatti, posso contare i sottoinsiemi di cardinalità k in Y contando le k-ulpe ordinate di elementi distinti di Y e dividendo il loro numero per le k-uple ordinate di elementi distinti che danno lo stesso sottoinsieme

$$\#\{A \subset Y \mid |A| = k\} = \frac{\#\, k-\text{uple ordinate di elementi distinti di } Y}{\begin{array}{c}\#\, k-\text{uple ordinate che danno}\\ \text{lo stesso sottoinsieme (cioè che}\\ \text{hanno gli stessi elementi)}\end{array}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Notazione 1.4.

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{con } n \geq k$$

Per convenzione $0! = 1$

$\binom{n}{0} = 1$ l'unico sottoinsieme con 0 elementi è $\varnothing$

PROPRIETÀ

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Dimostrazione.

Si possono verificare facilmente tramite un calcolo diretto.

Vediamo una dimostrazione insiemistica.

1. $|Y| = n$

   considero

   $$\begin{aligned} F : \{A \subset Y \mid |A| = k\} &\longrightarrow \{B \subset Y \mid |B| = n-k\} \\ A \quad &\mapsto \quad Y \setminus A \end{aligned}$$

   F è ben definita.

   F è iniettiva: $A_1 \neq A_2 \quad \Rightarrow \quad \exists a \in A_1$ e $a \notin A_2$ (o viceversa)

   quindi $a \notin Y \setminus A_1 = F(A_1)$ e $a \in Y \setminus A_2 = F(A_2)$

   che implica $F(A_1) \neq F(A_2)$

   F è surgettiva: sia $B \subset Y$ tale che $|B| = n-k$

   allora $|Y \setminus B| = k$ e $F(Y \setminus B) = Y \setminus (Y \setminus B) = B$

Quindi

$$\binom{n}{k} = \#\{A \subset Y \mid |A| = k\} = \\ \#\{B \subset Y \mid |B| = n-k\} = \binom{n}{n-k}$$

2. Sia $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.
   Allora $\forall A \subset Y$ si può avere $y_1 \in A$ oppure $y_1 \notin A$. Quindi

$$\{A \subset Y \mid |A| = k\} = \{A \subset Y \mid |A| = k \quad y_1 \in A\} \overset{\circ}{\bigcup} \\ \{A \subset Y \setminus \{y_1\} \mid |A| = k\}$$

   Poiché l'unione è disgiunta, passando alle cardinalità otteniamo

$$\binom{n}{k} = \#\{A \subset Y \mid |A| = k \quad y_1 \in A\} + \#\{A \subset Y \setminus \{y_1\} \mid |A| = k\} \\ = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

   Infatti scegliere $A \subset Y,\ |A| = k$ con $y_1 \in A$ vuol dire scegliere $k-1$ elementi di $Y \setminus \{y_1\}$ che è un insieme con $n-1$ elementi.

▲

Osservazione 1.5.

$$\mathcal{P}(Y) = \overset{\circ}{\bigcup_{k=0,\ldots,n}} \{A \subset Y \mid |A| = k\}$$

Passando alle cardinalità

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

e questo segue anche dalla formula generale

$$\mathbf{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}} \quad (*)$$

Esercizio 1.6. 1. Dimostrare per induzione la formula $(*)$.

La formula $(*)$ può essere anche dimostrata contando i monomi $a^k b^{n-k}$ che si ottengono dalla moltiplicazione:

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\cdot\dots\cdot(a+b)}^{n\ volte}$$

Per ottenere il monomio $a^k b^{n-k}$ occorre scegliere k volte a (o equivalentemente $n-k$ volte b) tra gli n fattori $(a+b)$. Quindi abbiamo $\binom{n}{k}$ monomi $a^k b^{n-k}$.