ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA

MAURO DI NASSO

Teorema 20.1.
"Assioma di scelta" $\Rightarrow$ *"Lemma di Zorn".*

Diamo di questo risultato due diverse dimostrazioni. La prima si basa su un uso della ricorsione transfinita. La seconda dimostrazione è un po' più lunga ed elaborata, ma consiste di argomentazioni che non richiedono conoscenze specifiche di teoria degli insiemi.

Dim.1. Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato dove ogni catena ammette maggioranti. Fissiamo una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\} \to P$, e prendiamo un elemento $\star \notin P$. Per ricorsione transfinita, definiamo $p_0 = f(P)$, e per $\alpha > 0$:

$$p_\alpha = \begin{cases} f(P^\alpha) & \text{se } \star \notin \{p_\beta \mid \beta < \alpha\} \text{ e } P^\alpha = \{p \in P \mid \forall \beta < \alpha \;\; p > p_\beta\} \neq \emptyset \\ \star & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Con questa definizione, costruiamo una sequenza strettamente crescente di elementi di P, fino a che ciò è possibile. Arrivati ad un passo α dove l'insieme dei maggioranti stretti P^α sia vuoto, poniamo $p_\alpha = \star$, e per tutti gli indici successivi imponiamo che la sequenza rimanga costantemente uguale a $\star$. Controlliamo che effettivamente la nostra sequenza ha queste proprietà.

Intanto, è immediato dalla definizione che se $p_\alpha = \star$, allora $p_\beta = \star$ per ogni $\beta > \alpha$. Inoltre, esistono indici α con $p_\alpha = \star$. Infatti, se così non fosse, ogni $p_\alpha = f(P^\alpha) \in P^\alpha$, e dunque la funzione-classe $\mathbb{F} : \alpha \mapsto p_\alpha$ definita sulla classe propria degli ordinali, sarebbe strettamente crescente, quindi iniettiva. Ma allora anche la sua immagine $\{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{ON}\}$ sarebbe una classe propria, e questo è impossibile perché si tratta di un sottoinsieme di P.

Sia adesso α il più piccolo indice con $p_\alpha = \star$. Se per assurdo α fosse un ordinale limite, allora ogni maggiorante della catena crescente $\{p_\beta \mid \beta < \alpha\}$ sarebbe anche un maggiorante stretto, e quindi un elemento di P^α. Ma allora dovrebbe essere $p_\alpha = f(P^\alpha)$, contro l'ipotesi $p_\alpha = \star$. Concludiamo allora che $\alpha = \beta + 1$ è un successore, e quindi p_β è l'ultimo elemento della sequenza diverso da $\star$. È adesso facile verificare che p_β è un elemento massimale in $(P, \leq)$, perché un eventuale $p > p_\beta$ apparterrebbe a $P^{\beta+1}$, e sarebbe $p_{\beta+1} = p_\alpha \neq \star$. $\square$

Dim.2. Sia $(P, \leq)$ un insieme p.o. dove ogni catena ammette maggioranti. Vogliamo trovare un elemento massimale. L'idea della dimostrazione è quella di costruire una catena bene ordinata $C \subseteq P$ il "più lunga possibile", in modo che l'unico maggiorante di C sia in realtà il massimo di C ed un elemento massimale per tutto $(P, \leq)$. Applichiamo l'assioma di scelta, e fissiamo una funzione $f : \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\} \to P$ che sceglie un elemento $f(X) \in X$ in ciascun sottoinsieme non vuoto $X \subseteq P$.

Diciamo che un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq P$ è una *f-catena* se:

- $(A, \leq)$ è bene ordinato;
- Per ogni $a \in A$, si ha $a = f(A^a)$ dove $A^a = \{p \in P \mid p > A_a\}$ è l'insieme dei maggioranti *stretti* del segmento $A_a = \{a' \in A \mid a' < a\}$.[1]

Ragioniamo informalmente per capire meglio l'idea che guida la dimostrazione. Se $p_0 = f(P)$, allora $A = \{p_0\}$ è una una f-catena. Infatti il segmento iniziale A^{p_0} è vuoto, e banalmente l'insieme dei suoi maggioranti stretti $A^{p_0} = P$. Se p_0 è elemento massimale, abbiamo finito. Altrimenti $A^{p_0} \neq \emptyset$ e possiamo prendere $p_1 = f(A^{p_0})$. È facile verificare che anche $\{p_0 < p_1\}$ è una f-catena. Di nuovo, se p_1 è un elemento massimale di P, la tesi è raggiunta. Altrimenti possiamo iterare il procedimento e, se non troviamo elementi massimali, arriviamo a definire una f-catena infinita $A = \{p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < p_{n+1} < \ldots\}$.
Adesso, per ipotesi ogni catena ammette maggioranti, dunque possiamo prendere l'elemento $p_\omega = f(\{p \in P \mid p > A\})$ ed aggiungerlo alla f-catena A. Si osservi che anche $A' = A \cup \{p_\omega\}$ è una f-catena, visto che il segmento iniziale $(A')_{p_\omega} = A$ e che $p_\omega = f(A)$. Proseguiamo in questo modo "allungando" la catena finché è possibile, cioè fin quando esistono maggioranti stretti.

Per rendere rigorosa questa costruzione informale, ci occorre intanto la seguente proprietà.

($\star$) *Se A e B sono due f-catene, allora una è segmento iniziale dell'altra.*

Visto che A e B sono buoni ordini, uno dei due è isomorfo ad un segmento iniziale dell'altro. Ad esempio, supponiamo che $\theta : A \to S$ sia un isomorfismo, dove S è un segmento iniziale (non necessariamente proprio) di B. Vogliamo dimostrare che θ è l'identità. Procediamo per assurdo, e consideriamo $a = \min\{x \in A \mid \theta(x) \neq x\}$. I segmenti iniziali A_a e $B_{\theta(a)}$ coincidono, dunque anche i corrispondenti insiemi di maggioranti stretti $A^a = B^{\theta(a)}$ sono uguali. Ma allora si avrebbe che $a = f(A^a) = f(B^{\theta(a)}) = \theta(a)$, contro l'ipotesi.

Sappiamo che l'unione di un insieme di buoni ordini che sono uno segmento iniziale dell'altro è ancora un buon ordine. Dunque l'unione $(C, \leq)$ di tutte le f-catene è un sottoinsieme bene ordinato di P. Inoltre è facile verificare che C stesso è una f-catena, e quindi C è la f-catena massima. In particolare, non esistono maggioranti stretti di C (altrimenti la catena C potrebbe essere estesa). Da questo segue che un elemento maggiorante della catena C è necessariamente il massimo di C, ed è inoltre un elemento massimale per P. $\square$

Teorema 20.2.
"Lemma di Zorn" $\Rightarrow$ "Buon ordinamento".

Dim. Dato un insieme X, consideriamo la collezione di tutti i possibili buoni ordini ottenuti con suoi sottoinsiemi:

$$\mathcal{B} = \{(B, \leq_B) \text{ buon ordine} \mid B \subseteq X\}.$$

[1] Se $X \subseteq P$ è un insieme, scriviamo $p > X$ per intendere $p > x$ per tutti i $x \in X$.

Il fatto che $\mathcal{B}$ è effettivamente un insieme segue per separazione, notando che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X \times X)$.[2] Su $\mathcal{B}$ definiamo la seguente relazione:

$$(B, \leq_B) \preceq (B', \leq_{B'}) \quad \text{se e solo se } (B, \leq_B) \text{ è un segmento iniziale di } (B', \leq_{B'}).$$

Più precisamente, richiediamo che $B \subseteq B'$, che la relazione d'ordine $\leq_{B'}$ ristretta ad elementi di B coincida con $\leq_B$, ed infine che se $x \leq_{B'} b$ dove $b \in B$, allora anche $x \in B$. È immediato verificare che $\preceq$ è un ordinamento parziale su $\mathcal{B}$. Inoltre, ogni catena C di $\mathcal{B}$ ammette maggiorante (basta considerare l'unione $\bigcup C$ e ricordare che unione di bene ordinati che sono uno segmento iniziale dell'altro è ancora un buon ordine). Possiamo allora applicare il Lemma di Zorn e ricavare l'esistenza di un elemento massimale $(B, \leq_B) \in \mathcal{B}$. Per concludere la dimostrazione, resta da verificare che $B = X$. Se così non fosse, potremmo prendere un elemento $\xi \in X \setminus B$, e sull'insieme $B \cup \{\xi\}$ considerare il buon ordinamento $\leq$ dove ξ viene posto "dopo" tutti gli elementi di B, cioè $x \leq y$ se e solo se $x, y \in B$ e $x \leq_B y$, oppure $y = \xi$. Allora $(B \cup \{\xi\}, \leq)$ sarebbe un buon ordine avente B come segmento iniziale generato da ξ, contro la massimalità di $(B, \leq_B)$. $\square$

Teorema 20.3.
"Buon ordinamento" $\Rightarrow$ "Assioma di scelta".

Dim. Sia X un insieme non vuoto fissato. Per ipotesi, esiste un buon ordinamento $\leq$ su X. Una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ si può allora definire ponendo $f(A) = \min A$ per ogni $\subseteq X$ non vuoto. $\square$

[2] Ricordiamo che gli insiemi ordinati $(B, \leq_B)$ sono coppie ordinate, dove B è un insieme e la relazione d'ordine $\leq_B$ è uno speciale insieme di coppie ordinate di elementi di B.