Esercizio 1

Consideriamo la matrice associata al sistema omogeneo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e sia } \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

l'appl. lineare associata ad A.

$$\text{Allora } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in W \iff \exists \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\iff \vec{b} \in \operatorname{Im} \varphi$$

Quindi una base di W e' una base di $\operatorname{Im}(T)$.

Per trovarla, effettuo la riduzione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & b_1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & b_2 \\ 2 & -4 & 4 & -4 & b_3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & b_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}-\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & b_4 - b_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 - 2(b_2 - b_1) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & b_4 - b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{scambio} \\ \mathrm{III} \text{ e } \mathrm{IV}}}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & b_4 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array}$$

Una base di $W = \mathrm{Im}(\varphi)$ si ottiene considerando i vettori pivot nella matrice iniziale:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

In alternativa, notiamo che $W = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \middle| \; b_3 - 2b_2 = 0 \right\}$ cioè $b_3 = 2b_2$

perché il sistema è risolubile $\Longleftrightarrow$ l'ultima è una riga di zeri.

Quindi $W = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 2b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} \middle| \; b_1, b_2, b_4 \in \mathbb{R} \right\} =$

$$= \left\{ b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; b_1, b_2, b_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quei tre vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di W.

$\dim(\ker\varphi) = \#$ variabili libere $= 1$

Una base è data dall'unica soluzione speciale (che non era richiesto calcolare)

La variabile libera è x_4. Pongo $x_4 = 1$ nel sistema omogeneo ridotto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 \qquad\quad - x_4 = 0 \\ \qquad\quad x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_3 + 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3$

$-x_2 - x_4 = 0 \Rightarrow -x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 - 6 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la soluzione speciale e quindi

$\mathcal{B} = \{\vec{S}\}$ è una base di $\ker\varphi$.

Esercizio 2

La matrice associata a T e' $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

La matrice "cambio di base" e':

$$S_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

La matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e alla base canonica in arrivo e':

$$B = A \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

La matrice C associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia in partenza che in arrivo e' $C = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

Calcoliamo l'inversa S^{-1} con il procedimento di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I+3II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I-2II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi $S^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

ed abbiamo che

$$C = S^{-1} \cdot \underbrace{A \cdot S} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -27 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Un modo alternativo e più diretto per calcolare C è applicare direttamente la definizione.

$C = \left(T(v_1)_{\mathcal{B}} \middle| T(v_2)_{\mathcal{B}} \right)$ è la matrice avente come colonne le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ delle immagini dei vettori della base $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$T(v_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$. Le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ dove $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Si può calcolare facilmente che $\lambda_1 = -13$ e $\lambda_2 = 9$.

Analogamente $T(v_2) = T\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$, le cui coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ dove $\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$

Si può calcolare che $\mu_1 = -27$ e $\mu_2 = 18$.

Quindi $T(v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$, $T(v_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 18 \end{pmatrix}$

e perciò $C = \begin{pmatrix} -13 & -27 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

Esercizio 3

Troviamo il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & k \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

(sviluppo lungo la II riga) $= (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

(sviluppo lungo la II riga) $= (2-\lambda)(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - k\right)$$

Quindi gli autovalori sono, assumendo $k \geq 0$,

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1$

$(1-\lambda)^2 = k \Rightarrow 1-\lambda = \pm\sqrt{k} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_3 = 1-\sqrt{k} \\ \lambda_4 = 1+\sqrt{k} \end{array}$

(se $k < 0$, λ_1 e λ_2 sono gli unici autovalori reali)

Se $\underline{k=0}$ allora $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$

e $\lambda = 1$ è autovalore di molteplicità algebrica 3.

Se $k > 0$, allora

$$1-\sqrt{k} < 1 < 1+\sqrt{k}$$

e l'unica possibilità per avere un autovalore di molteplicità algebrica 2 è che

$\lambda_4 = 1+\sqrt{k} = 2 = \lambda_2$ e questo accade

quando $k = 1$.

Quando $\underline{k=0}$, gli autovalori sono

$\lambda = 1$ di molt. algebrica 3

$\lambda = 2$ di molt. algebrica 1

In questo caso la matrice è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio $Aut_A(1)$ ha molt. algebrica 3, cioè $\dim(\ker(A-I)) = 3$.

$$A-I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e IV}]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

$\dim(\ker(A-I)) = \underset{\text{variabili libere}}{\text{numero}} = 2 \neq 3$ $\underline{\text{NON}}$ DIAGONALIZZABILE

Esercizio 4

La matrice associata al sistema omogeneo $\mathcal{S}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sottospazio V di tutte le soluzioni del sistema $\mathcal{S}$ è uguale al nucleo di A (o più precisamente al nucleo dell'appl. lineare associata ad A)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Ci sono 2 variabili libere, quindi

$$\dim(V) = 2$$

$V \subseteq \mathbb{R}^4$ e ricordiamo che $\dim(V) + \dim(V^\perp) = 4$,

quindi $\dim(V^\perp) = 2$.

Troviamo le soluzioni speciali, che costituiranno una base di $\ker(A) = V$.

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 - 0 + 1 + 0 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ 2x_2 \quad -2x_4 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 - 1 + 0 + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_2 \quad -2x_4 = 0 \rightarrow 2x_2 - 2 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ è una base di V.

Se $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono i due vettori riga della matrice A

$$A \cdot \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \hline \vec{u}_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{s}_1 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{s}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ perché $\vec{s}_1 \in \ker A$

quindi $\vec{u}_1 \perp \vec{s}_1$ e $\vec{u}_2 \perp \vec{s}_1$.

Analogamente $A \cdot \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{s}_2$ e $\vec{u}_2 \perp \vec{s}_2$.

Questo garantisce che

$$\text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \subseteq \text{Span}\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}^{\perp} = V^{\perp}$$

e quindi $\text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = V^{\perp}$.

Infine notiamo che $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ perche'

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Percio' $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ e' una base ortogonale di V.

Per ottenere una base ortonormale, basta "normalizzare" i vettori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ dividendoli per i rispettivi moduli.

$$|\vec{u}_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\vec{u}_2| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Quindi $\left\{\frac{1}{2}\vec{u}_1, \frac{1}{2}\vec{u}_2\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right\}$ e' una base ortonormale di $V^{\perp}$.

Ricordiamo ora il metodo generale per trovare una base di $V^\perp$, che ci darà un modo alternativo per risolvere l'esercizio.

Per definizione

$$V^\perp = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{w} \perp \vec{v} \text{ per ogni } \vec{v} \in V \}$$

$\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ è una base di V e si dimostra facilmente che $\vec{w} \in V^\perp \iff \vec{w} \perp \vec{s}_1$ e $\vec{w} \perp \vec{s}_2$.

Segue allora questa proprietà:

$\vec{w} \in V^\perp \iff \vec{w} \in \ker B$, cioè $\boxed{V^\perp = \ker B}$ dove

$B = \left(\dfrac{\vec{s}_1}{\vec{s}_2} \right)$ è la matrice che ha come righe i vettori $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ della base di V

Infatti $B \cdot \vec{w} = \left(\dfrac{\vec{s}_1}{\vec{s}_2} \right) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \cdot \vec{w} \\ \vec{s}_2 \cdot \vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

se e solo se $\vec{s}_1 \cdot \vec{w} = 0$ e $\vec{s}_2 \cdot \vec{w} = 0$ se e solo se

$\vec{s}_1 \perp \vec{w}$ e $\vec{s}_1 \perp \vec{w}$.

Dunque $V^\perp = \ker \begin{pmatrix} \vec{s_1} \\ \hline \vec{s_2} \end{pmatrix} = \ker \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Le variabili libere sono x_3 e x_4. Troviamo le soluzioni speciali.

$$x_3 = 1, \; x_4 = 0 \qquad \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \to x_1 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \to x_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0, \; x_4 = 1 \qquad \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \to x_1 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \to x_2 = -1 \end{cases} \qquad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi una base di $V^\perp$ e' $\mathcal{B} = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$.

Notiamo che $\vec{w_1} \perp \vec{w_2}$. Per ottenere una base ortonormale basta "normalizzare" i vettori $\vec{w_1}$ e $\vec{w_2}$ dividendoli per i rispettivi moduli, cioe'

$$|\vec{w_1}| = \sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} \quad \text{e}$$

$$|\vec{w_2}| = \sqrt{0^2+(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Quindi una base ortonormale e'

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w_1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w_2} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$