Appello Algebra Lineare
09 Maggio 2022

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice nella base canonica (standard) è

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) Si verifichi che -1 è autovalore di A e si trovi un autovettore associato.
(2) Si calcolino gli altri autovalori di A con le loro molteplicità algebriche.
(3) Si determini se A è diagonalizzabile, e in caso affermativo si calcoli una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 2. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3 dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(A) Si calcoli la dimensione di V.
(B) Si calcoli la dimensione di $V + W$.
(C) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$.

Risposta (A)	Risposta (B)	Risposta (C)

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x + \alpha y \\ -x - (\alpha + 1)y \end{bmatrix}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro reale fissato.

(a) Si calcoli la matrice di L nelle basi canoniche (standard) di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
(b) Per quali valori di α si ha $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$?
(c) Per quali valori di α si ha $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^3$?

Risposta (a)

Risposta (b)

Risposta (c)

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici 2×2 a coefficienti reali. Sappiamo che questo è uno spazio di dimensione 4.

(1) Sia R il sottoinsieme di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici M tali che

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Si determini se R è un sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e in caso lo sia se ne determini una base.

(2) Sia S il sottoinsieme di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici M tali che

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini se S è un sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e in caso lo sia se ne determini una base.

Nell'apposito riquadro scrivere NO se non è un sottospazio (con motivazione sul resto del foglio), altrimenti scrivere una base.

Risposta (1)

Risposta (2)

Risposte

Risposte Esercizio 1.

(2) Calcolando il polinomio caratteristico si trova che gli autovalori sono 2, di molteplicità algebrica 2, e -1 di molteplicità algebrica 1.

Una base dell'autospazio relativo all'autovalore 2 è $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(1) Una base dell'autospazio relativo all'autovalore -1 è $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. (Questo calcolo si può fare anche prima di risolvere (2), risolvendo l'equazione $Av = -v$.)

Dunque le molteplicità geometriche di 2 e -1 sono rispettivamente 2 e 1, quindi A è diagonalizzabile.

(3) Una base di autovettori è quindi data da $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Risposte Esercizio 2.

(A) Lo spazio V è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$, ed ha quindi dimensione 3, dunque $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V. Alternativamente, utilizzando l'algoritmo di Gauss per la matrice avendo v_1, v_2, v_3, v_4 come colonne si trovano 3 pivots, quindi $\dim V = 3$. Alternativamente, utilizzando l'algoritmo di Gauss per la matrice avendo v_1, v_2, v_3, v_4 come colonne si trovano 3 pivots, quindi $\dim V = 3$.

(B) Una base di W è $\{w_1, w_2, w_3\}$ con $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifica che $\{v_1, v_2, v_3, w_1\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, quindi $V + W = \mathbb{R}^4$ ha dimensione 4.

Alternativamente, si osserva che $\dim W = 3$ (come lo sottospazio delle soluzioni di un'equazione lineare non banale in $\mathbb{R}^4$) e W non contiene V (ad esempio $v_1 \notin W$). Dunque $V + W$ ha dimensione strettamente più grande che V, che può essere solo 4.

(C) Il sottospazio $V \cap W$ è dato dalle equazioni $3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, una cui base è $\{u_1, u_2\}$ con $u_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$. Quindi $V \cap W$ ha dimensione 2.

Alternativamente, con la formula di Grassmann si calcola $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Risposte Esercizio 3.

(a) La matrice cercata è $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \alpha \\ -1 & -\alpha - 1 \end{bmatrix}$.

(b) Si ha $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$ per $\alpha \neq -2$. Questo si ottiene risolvendo l'equazione $Lv = 0$. Alternativamente, si osserva che dopo la formula della dimensione $\dim \mathrm{Ker}(L) =$

$2 - \dim \operatorname{Im}(L)$, quindi $\operatorname{Ker}(L) = \{0\}$se e solo se le colonne della matrice sono linearmente indipendenti. Questo vale ovviamente per $\alpha \neq -2$.

(c) Non si ha mai $\operatorname{Im}(L) = \mathbb{R}^3$ perchè, per la formula della dimensione, $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(L) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$.

Risposte Esercizio 4.

(1) R non è un sottospazio: ad esempio la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ non appartiene a R.

(2) S è un sottospazio, come si verifica facilmente. Gli elementi di S sono le matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tali che $a + 2b = 0$ e $c + 2d = 0$, quindi una base è data da $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.