Appello di Algebra Lineare
09 Maggio 2022

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice nella base canonica (standard) è

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

(1) Si verifichi che 1 è autovalore di A e si trovi un autovettore associato.
(2) Si calcolino gli altri autovalori di A con le loro molteplicità algebriche.
(3) Si determini se A è diagonalizzabile, e in caso affermativo si calcoli una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A.

Risposta (1)

Risposta (2)

Risposta (3)

Esercizio 2. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3 dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(A) Si calcoli la dimensione di V.
(B) Si calcoli la dimensione di $V + W$.
(C) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$.

Risposta (A)	Risposta (B)	Risposta (C)

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x - \alpha y \\ -x + (\alpha - 1)y \end{bmatrix}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro reale fissato.

(a) Si calcoli la matrice di L nelle basi canoniche (standard) di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
(b) Per quali valori di α si ha $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$?
(c) Per quali valori di α si ha $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^3$?

Risposta (a)

Risposta (b)

Risposta (c)

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici 2×2 a coefficienti reali. Sappiamo che questo è uno spazio di dimensione 4.

(1) Sia R il sottoinsieme di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici M tali che

$$M \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Si determini se R è un sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e in caso lo sia se ne determini una base.

(2) Sia S il sottoinsieme di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici M tali che

$$M \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini se S è un sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e in caso lo sia se ne determini una base.

Nell'apposito riquadro scrivere NO se non è un sottospazio (con motivazione sul resto del foglio), altrimenti scrivere una base.

Risposta (1)

Risposta (2)

Risposte

Risposte Esercizio 1.

(2) Calcolando il polinomio caratteristico si trova che gli autovalori sono -2, di molteplicità algebrica 2, e 1 di molteplicità algebrica 1.

Una base dell'autospazio relativo all'autovalore -2 è $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(1) Una base dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. (Questo calcolo si può fare anche prima di risolvere (2), risolvendo l'equazione $Av = v$.)

Dunque le molteplicità geometriche di -2 e 1 sono rispettivamente 2 e 1, quindi A è diagonalizzabile.

(3) Una base di autovettori è quindi data da $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Risposte Esercizio 2.

(A) Lo spazio V è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$, ed ha quindi dimensione 3, dunque $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V. Alternativamente, utilizzando l'algoritmo di Gauss per la matrice avendo v_1, v_2, v_3, v_4 come colonne si trovano 3 pivots, quindi $\dim V = 3$.

(B) Una base di W è $\{w_1, w_2, w_3\}$ con $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifica che $\{v_1, v_2, v_3, w_1\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, quindi $V + W = \mathbb{R}^4$ ha dimensione 4.

Alternativamente, si osserva che $\dim W = 3$ (come lo sottospazio delle soluzioni di un'equazione lineare non banale in $\mathbb{R}^4$) e W non contiene V (ad esempio $v_1 \notin W$). Dunque $V + W$ ha dimensione strettamente più grande che V, che può essere solo 4.

(C) Il sottospazio $V \cap W$ è dato dalle equazioni $3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, una cui base è $\{u_1, u_2\}$ con $u_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$. Quindi $V \cap W$ ha dimensione 2.

Alternativamente, con la formula di Grassmann si calcola $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Risposte Esercizio 3.

(a) La matrice cercata è $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\alpha \\ -1 & \alpha - 1 \end{bmatrix}$.

(b) Si ha $\operatorname{Ker}(L) = \{0\}$ per $\alpha \neq 2$. Alternativamente, si osserva che dopo la formula della dimensione $\dim \operatorname{Ker}(L) = 2 - \dim \operatorname{Im}(L)$, quindi $\operatorname{Ker}(L) = \{0\}$ se e solo se le colonne della matrice sono linearmente indipendenti. Questo vale ovviamente per $\alpha \neq 2$.

(c) Non si ha mai $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^3$ perchè, per la formula della dimensione, $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(L) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$.

Risposte Esercizio 4.

(1) R non è un sottospazio: ad esempio la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ non appartiene a R.

(2) S è un sottospazio, come si verifica facilmente. Gli elementi di S sono le matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tali che $-a + 2b = 0$ e $-c + 2d = 0$, quindi una base è data da $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.