Appello di Algebra Lineare
20 dicembre 2022

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1.

(1) Per quali valori del parametro reale a i vettori

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\a\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti?

(2) Stessa domanda per i vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\a\end{pmatrix}.$$

Soluzione. Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice che ha questi vettori come colonne, in (1) si ottiene che i vettori non sono mai linearmente indipendenti, mentre in (2) sono linearmente indipendenti se e solo se $a \neq 2$. $\square$

Risposta (1)

Risposta (2)

Esercizio 2. Si considerano lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici reali 2×2 e la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'imagine dell'applicazione lineare $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ data da
$$X \mapsto XA - AX.$$

(2) Stessa domanda per l'applicazione lineare data da
$$X \mapsto XA + AX.$$

Soluzione. Consideriamo la base ordinata di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
$$E := \left\{ E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
La matrice dell'applicazione lineare in (1) nella base E è
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
la cui forma di echelon (a scalini) ha chiaramente due pivot, quindi nucleo e immagine hanno entrambi dimensione 2.

La matrice dell'applicazione lineare in (2) nella base E è
$$N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
la cui forma di echelon (a scalini) ha chiaramente quattro pivot, quindi l'immagine ha dimensione 4 e il nucleo ha dimensione 0. $\square$

Risposta (1)

Risposta (2)

Esercizio 3. Si consideri la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 7 & 6 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(1) Per quali valori di a la matrice ammette 4 autovalori distinti?
(2) Per quali valori di a la matrice ammette un autovalore di molteplicità algebrica 3?
(3) Per quali valori di a la matrice ammette un autovalore di molteplicità geometrica 3?

Soluzione. Detta M la matrice data, il polinomio caratteristico $\det(xI - M)$ si calcola facilmente, e si ottiene $(x - 2 + \sqrt{4 - 3a})(x - 2 - \sqrt{4 - 3a})(x - 3)^2$. Visto che l'autovalore 3 ha molteplicità algebrica almeno 2, non c'è nessun valore di a per cui la matrice M ammette 4 autovalori distinti. Inoltre per avere un autovalore di molteplicità algebrica almeno 3, l'unica possibilità è che $2 + \sqrt{4 - 3a} = 3$ oppure $2 - \sqrt{4 - 3a} = 3$. Ma la seconda equazione non ha soluzione, mentre la prima ha l'unica soluzione $a = 1$. In questo caso l'autovalore 3 ha molteplicità algebrica 3 (mentre l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 1), e dunque $a = 1$ è l'unico valore di a per cui M ammette un autovalore (ossia 3) di molteplicità algebrica 3. Dunque questo è anche l'unico valore possibile per cui M potrebbe ammettere un autovalore di molteplicità geometrica 3. Ma si calcola facilmente che per $a = 1$ l'autospazio relativo all'autovalore 3 ha dimensione 1 (una base è data da $(1, 3, 0, 0)$), dunque non c'è nessun valore di a per cui la matrice M ammette un autovalore di molteplicità geometrica 3. $\square$

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 4. Si considerino la matrice 3×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^3$ dei vettori ortogonali allo spazio delle colonne di A (per il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$).

(1) Qual è la dimensione di V?

(2) Trovare **tutti** i vettori di norma 3 contenuti in V.

Soluzione. Sia $V^\perp$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A, dunque V è l'ortogonale di $V^\perp$ in $\mathbb{R}^3$. Le colonne di A non sono proporzionali, dunque sono linearmente indipendenti, e quindi $\dim V^\perp = 2$. Dalla formula della dimensione dell'ortogonale $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ deduciamo che V ha dimensione 1. I vettori di V sono le soluzioni del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

che si calcolano facilmente: $V = \{\lambda(-2,1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. I vettori di norma 3 in V sono i $\lambda(-2,1,2)$ tali che $3 = \sqrt{\lambda^2(4+1+4)} = |\lambda|\sqrt{9} = |\lambda|3$, ossia $(-2,1,2)$ e $(2,-1,-2)$. $\square$

Risposta (1)

Risposta (2)