Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 27 Giugno 2022

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione:

$$27z^6 - 64 = 0$$

$$27z^6 = 64 \iff z^6 = \frac{64}{27}$$

$$z = (\rho, \theta) \rightsquigarrow z^6 = (\rho^6, 6\theta)$$

$$\frac{64}{27} \rightsquigarrow \left(\frac{64}{27}, 0\right)$$

$$\begin{cases} \rho^6 = \frac{64}{27} \Rightarrow \rho = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 6\theta = 0 + 2k\pi \Rightarrow \theta = k \cdot \frac{\pi}{3} = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \end{cases}$$

$$z_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) \rightsquigarrow z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$z_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{3}\right) \rightsquigarrow z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + i$$

$$z_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\pi\right) \rightsquigarrow z_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + i$$

$$z_4 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \pi\right) \rightsquigarrow z_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$z_5 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3}\pi\right) \rightsquigarrow z_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - i$$

$$z_6 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\pi\right) \rightsquigarrow z_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - i$$

Esercizio 2. [8 pt.]

Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Descrivere l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le soluzioni del sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II-2I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{cambio} \\ II \leftrightarrow III}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{III-3II} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

Il sistema e' risolubile (l'ultima riga e' formata da zeri)

Le variabili libere sono x_3 e x_4.

Soluzioni speciali:

$$x_3 = 1,\ x_4 = 0 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 & \rightarrow x_1 + 1 + 1 - 0 = 0 \rightarrow x_1 = -2 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 & \rightarrow x_2 + 1 + 0 = 0 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

$$x_3 = 0,\ x_4 = 1 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 & \rightarrow x_1 + 2 + 0 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 & \rightarrow x_2 + 0 + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

Dunque $\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono le soluzioni speciali.

Troviamo una soluzione particolare, ad esempio ponendo le variabili libere $x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \rightarrow x_1 + 2 + 0 - 0 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \rightarrow x_2 + 0 + 0 = -2 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'insieme di tutte le soluzioni e':

$$\mathcal{S} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, determinare la sua molteplicità geometrica e trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

(1)

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -1 & 12 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{sviluppo lungo la} \\ \text{II riga}}}{=} (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 12 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sviluppo lungo la} \\ \text{III riga}}}{=} (-\lambda)(-4-\lambda) \det \begin{vmatrix} -4-\lambda & 12 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$$

$$= \lambda(\lambda+4)\left[(-4-\lambda)(6-\lambda)+24\right] = \lambda(\lambda+4)\left(\cancel{-24}+4\lambda-6\lambda+\lambda^2+\cancel{24}\right) =$$

$$= \lambda^2(\lambda+4)(\lambda-2)$$

Autovalori: $\lambda = 0$ molt. alg. 2

$\lambda = -4$ molt. alg. 1

$\lambda = 2$ molt. alg. 1

② $\lambda = 0$

$$Aut_A(0) = \ker(A) = \ker\begin{pmatrix}-4 & -1 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 6 & -2\\ 0 & -1 & 0 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e III}} \begin{pmatrix}-2 & -1 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 12 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -4\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{III-2I} \begin{pmatrix}-2 & -1 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 0 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio II e IV}} \begin{pmatrix}-2 & -1 & 6 & -2\\ 0 & -1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{III+II}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 6 & -2\\ 0 & -1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}P & P & L & L\end{matrix}\end{array}$$

Due variabili libere $\Rightarrow$ $\dim Aut_A(0) = 2$, cioe' $\lambda = 0$ ha molt. geom. 2.

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$

$$\begin{cases}-2x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \to -2x_1 + 0 + 6 - 0 = 0 \to x_1 = 3\\ -x_2 \qquad -4x_4 = 0 \to -x_2 + 0 = 0 \to x_2 = 0\end{cases}$$

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$

$$\begin{cases}-2x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \to -2x_1 + 4 + 0 - 2 = 0 \to x_1 = 1\\ -x_2 \qquad -4x_4 = 0 \to -x_2 - 4 = 0 \to x_2 = -4\end{cases}$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$ formano una base di $Aut_A(0)$

$\lambda = -4$

$$Aut_A(-4) = \ker(A + 4I) = \ker\begin{pmatrix}0 & -1 & 12 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 10 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e III}}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 10 & -2\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 12 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio II e IV}} \begin{pmatrix}-2 & -1 & 10 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 12 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[IV+4II]{III-II} \begin{array}{c}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 10 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}P & P & P & L\end{matrix}\end{array}$$

Una variabile libera, quindi dim $Aut_A(-4) = 1$,

cioè molt. geom. di $\lambda = -4$ è 1.

$$x_1 = -1$$

Variabile libera $x_4 = 1$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0 \rightarrow -2x_1 + 0 + 0 - 2 = 0 \\ -x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ 12x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ base di } Aut_A(-4)$$

$\underline{\lambda = 2}$

$$Aut_A(2) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -6 & -1 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e III}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - 3I} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV - \frac{1}{2}II]{III + II} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV + III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

Una variabile libera, cioè x_3.

Quindi dim $Aut_A(2) = 1$, cioè la molt. geom. di $\lambda = 2$ è 1.

$$x_3 = 1 \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \rightarrow 2x_1 + 0 - 4 + 0 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \\ -2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ 6x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ base di } Aut_A(2)$$

③

Se $S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la

matrice "cambio di base" rispetto alla base di autovettori

$B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, allora

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ e' la matrice diagonale

avente gli autovalori (ripetuti con la loro molteplicità) sulla diagonale.

Esercizio 4 [punti 6]

1. Determinare una matrice 3×3 che ha il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ come autovettore

   di autovalore $\lambda = -2$.

2. Esiste una matrice A di dimensioni 3×3 (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti tre proprietà?

   - L'applicazione lineare associata non è iniettiva.
   - $\lambda = -2$ è autovalore.
   - A è diagonalizzabile.

   Se la risposta è NO, spiegare perché. Se la risposta è SI, trovare un esempio.

① Basta prendere una matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{pmatrix}$.

$\vec{v}$ autovettore di autovalore $\lambda = -2$ significa che $D \cdot \vec{v} = -2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Quindi deve essere $\begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = -2 \\ c = -2 \end{matrix}$

Qualunque matrice

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha la proprietà richiesta.

(2) Ricordiamo che una matrice quadrata A non è invertibile $\Leftrightarrow$ non è iniettiva $\Leftrightarrow$ ha $\lambda = 0$ come autovalore.

Banalmente la seguente matrice ha le proprietà richieste.
Infatti ogni matrice diagonale è banalmente diagonalizzabile, e i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

autovalori
$\lambda = 0$
$\lambda = -2$
$\lambda = 1$