Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

17 Luglio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se v_1 e v_2 appartengono ad un sottospazio V allora anche $v_1 - 2v_2 \in V$.	☑	☐
2) Quattro vettori non nulli qualunque di $\mathbb{R}^4$ generano $\mathbb{R}^4$.	☐	☑
3) Se $v_1 \perp v_2$ e $v_2 \perp v_3$ allora $v_1 \perp v_3$.	☐	☑
4) Se la funzione $f : A \to B$ non è iniettiva, allora f non ha inversa sinistra.	☑	☐
5) Se 0 è un autovalore della matrice quadrata A allora A non è invertibile.	☑	☐
6) Siano V e W sottospazi di $\mathbb{R}^{10}$. Se $\dim(V) = \dim(W) = 6$ allora $\dim(V \cap W) \geq 2$.	☑	☐
7) Se una matrice ha variabili libere allora i vettori colonna non sono linearm. indipendenti.	☑	☐
8) Siano $A = \{k^2 + k \mid k \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 17\}$. Allora $A \cap B$ contiene 3 elementi.	☑	☐
9) Il prodotto di matrici ortogonali è una matrice ortogonale.	☑	☐
10) Se $z = \sqrt{3} + i$ allora z^3 è un numero immaginario puro.	☑	☐
11) Se A è una matrice $n \times m$ allora $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ è un sottospazio vettoriale.	☑	☐
12) Se $v \neq 0$ appartiene ad un autospazio di una matrice A allora v è un autovettore di A.	☑	☐

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 17 Luglio 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$e^{z-5} + i = 0.$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z^6 + 64 = 0.$$

1\. $z = a + ib$. $e^{z-5} = e^{(a-5)+ib} \rightsquigarrow$

in coordinate polari $\rightsquigarrow (\underbrace{e^{a-5}}_{\rho}, \underbrace{b}_{\theta})$

$e^{z-5} = -i$ $\quad -i \rightsquigarrow$ in coordinate polari $\rightsquigarrow (1, -\frac{\pi}{2})$

Quindi $\begin{cases} e^{a-5} = 1 \Rightarrow a-5=0 \Rightarrow a=5 \\ b = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

Le infinite soluzioni sono i numeri $z = 5 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

(2) $z = (\rho, \theta)$ in coordinate polari

$-64 = (64, \pi)$ "

$$z^6 = -64 \iff (\rho^6, 6\theta) = (64, \pi) \iff$$

$$\begin{cases} \rho^6 = 64 \Rightarrow \rho = 2 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pi/6 + k \cdot \pi/3 \end{cases}$$

$z_1 = (2, \pi/6) \rightsquigarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

$z_2 = (2, \pi/2) \rightsquigarrow z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

$z_3 = (2, \frac{5}{6}\pi) \rightsquigarrow z_3 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + i$

$z_4 = (2, \frac{7}{6}\pi) \rightsquigarrow z_4 = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} - i$

$z_5 = (2, \frac{3}{2}\pi) \rightsquigarrow z_5 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i$

$z_6 = (2, \frac{11}{6}\pi) \rightsquigarrow z_6 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - i$

Queste sono le 6 soluzioni dell'equazione assegnata.

Esercizio 2. [8 pt.] Considerare i seguenti tre vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 .$$

1. Trovare una base dell'immagine di f.
2. Trovare una base del nucleo di f.
3. Sia $v = (-1, 1, 2, -2) \in \mathbb{R}^4$. Determinare il seguente insieme:

$$\mathcal{S} = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid f(w) = v \} .$$

La matrice associata ad f e' $A = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \right)$, cioe'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nel punto 3. si chiedono le soluzioni $w \in \mathbb{R}^3$ del sistema $A \cdot w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, quindi conviene ridurre la matrice A cui si aggiunge $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ come ultima colonna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III+I \\ IV-2I}]{II+2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III+II}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

Le prime due colonne sono le colonne pivot, quindi una base dell'Immagine e' data da

$$\mathcal{B}_{Imm} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ che include i primi due vettori colonna di A.

La variabile libera (unica) e' x_3. Troviamo la soluzione speciale, utilizzando il sistema omogeneo nella forma ridotta.

$$x_3=1 \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 & \Rightarrow x_1 = -1 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{ker} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ e' una base del nucleo.

Per trovare tutte le soluzioni di $A \cdot w = v$

devo trovare una soluzione particolare.

Ad esempio ponendo la variabile libera $x_3 = 0$

si ottiene $\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 & \Rightarrow \quad x_1 = -1 \\ -x_2 + 2x_3 = -1 & \Rightarrow \quad -x_2 + 0 = -1 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$

$$\vec{S}_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si tratta in effetti di una soluzione particolare, infatti

$$A \cdot \vec{S}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{S}_p = f(\vec{S}_p)$$

L'insieme di tutte le soluzioni e'

$$\mathcal{S} = \{ \vec{S}_p + \vec{v} \mid \vec{v} \in \ker A \} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 3. [10pt.] Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

1.

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} (-2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(1-\lambda)\det.\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)\left[(4-\lambda)(3-\lambda)-6\right]$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)(12-4\lambda-3\lambda+\lambda^2-6) = (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda^2-7\lambda+6) =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-6) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2(\lambda-6)$$

m.a. 1 $\lambda=-2$ m.a. 2 $\lambda=1$ m.a. 1 $\lambda=6$

2. $\lambda=-2$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV+3I}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow IV} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

Variabile libera x_4

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 + 6x_2 \quad -3x_4 = 0 & \rightarrow -x_1 + 6\cdot(+\tfrac{1}{4}) - 3 = 0 \\ 16x_2 \quad -4x_4 = 0 & \rightarrow 16x_2 - 4 = 0 \rightarrow x_2 = +\tfrac{1}{4} \\ 3x_3 \quad = 0 & \rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$-x_1 + \tfrac{3}{2} - 3 = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 = -\tfrac{3}{2}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Aut_A(-2) = \text{Span}\{v_1\}$$

$\underline{\lambda = 1}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow I} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV + 3I]{II - 3I}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{7}{9} II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

x_3 e x_4 variabili libere

$m.g. = 2$

$$\begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \quad -3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2 - 3x_4 = 0 \\ -9x_2 \quad +9x_4 = 0 \Rightarrow -9x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \quad -3x_4 = 0 & \rightarrow -x_1 + 3 \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \quad -9x_2 \quad +9x_4 = 0 & \rightarrow -9x_2 + 9 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 6}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV + 3I]{II - 8I}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{1}{2} II} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_4 variabile libera

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \quad -3x_4 = 0 & \rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_4 = 3 - 3 = 0 \\ \quad 16x_2 \quad +24x_4 = 0 & \rightarrow 16x_2 + 24 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{3}{2} \\ \quad\quad -5x_3 \quad = 0 & \rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3)

La matrice A è diagonalizzabile perché ha tutti autovalori reali e le molteplicità algebriche sono uguali alle molteplicità geometriche.

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di autovettori

Se $S = \left(v_1 | v_2 | v_3 | v_4\right) = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

è la matrice "cambio di base", allora

$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ è diagonale

(con gli autovalori sulla diagonale)

Esercizio 4. [7 pt.] Sia A la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ (in partenza ed in arrivo):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trovare la matrice B associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{v_2, v_1\}$ (in partenza ed in arrivo).
2. $*$ Trovare tutte le coppie di vettori $\{v_1, v_2\}$ tali che la matrice associata ad f rispetto alla base canonica (in partenza ed in arrivo) sia $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vista la matrice A, abbiamo che

$f(v_1) = 2 \cdot v_1$ e $f(v_2) = v_2$

$(2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2)$ $(0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2)$

Rispetto alla base $\{v_2, v_1\}$ abbiamo allora

$f(v_2) = 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_1$ e $f(v_1) = 0 \cdot v_2 + 2 \cdot v_1$.

Quindi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, in

modo che la matrice "cambio di base" sia

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La matrice rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ e'

allora $A = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot S \iff$

$$S \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot S \text{, cioe'}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Quindi $\begin{cases} 2a = 2a+c \Rightarrow 2a = 2a \rightarrow \text{nessuna informazione} \\ b = 2b+d \Rightarrow b = -d \iff d = -b \\ 2c = c \Rightarrow c = 0 \\ d = d \rightsquigarrow \text{nessuna informazione} \end{cases}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$