Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 12 Febbraio 2024

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z^3 - 2z^2 + 2z = 0$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$e^{2z} + 1 = 0.$$

Esercizio 2. [8 pt.]

Considerare la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice B, e sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice trasposta B^T.

1. Determinare una base del nucleo di f.

2. Determinare una base del nucleo di g.

3. Determinare una base dell'intersezione $\mathrm{Imm}(f) \cap \mathrm{Imm}(g)$.

4. Determinare la dimensione del sottospazio $\ker(f) + \ker(g)$.

Esercizio 3. [10pt.] Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.

2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.

3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Esercizio 4. [6 pt.]

1. Determinare una matrice A di dimensione 2×2 che soddisfi le seguenti proprietà:
   (a) $\lambda = 2$ è autovalore di A.
   (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di A.
2. È vero che tutte le matrici A con le proprietà (a) e (b) di sopra sono diagonalizzabili? Motivare bene la risposta.
3. Esistono matrici non nulle A che soddisfano la condizione (b) di sopra ed hanno un unico autovalore? Motivare bene la risposta.