Logica Matematica 1

(Uso di ultrafiltri e metodi nonstandard in Teoria di Ramsey e Teoria combinatoria dei numeri)

II semestre – Modulo specialistico – 7 crediti (30 ore)
Docente: M. Di Nasso

Programma previsto

Strumenti

- Lo spazio degli ultrafiltri βN (compattificazione di Stone-Cech di N).
- Strutture di semi-gruppo topologico su βN e ultrafiltri idempotenti.
- I numeri naturali nonstandard *N e i principi dell'analisi nonstandard.
- La dinamica topologica su βN e *N, dinamica simbolica.

Applicazioni

Verrà dimostrata una rappresentativa selezione di risultati tra i seguenti:

- Teorema di Ramsey: "Per ogni colorazione finita delle coppie di numeri naturali, esiste un insieme infinito di naturali le cui coppie sono monocromatiche".
- Teorema di Schur: "ogni colorazione finita di N ammette infinite triple x, y, x+y monocromatiche.
- Teorema di Hindman: "per ogni colorazione finita di N esiste un insieme infinito con la proprietà che tutte le somme finite di suoi elementi distinti sono monocromatiche".
- Teorema di van der Waerden: "per ogni colorazione finita di N esiste un colore che contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe".
- Teorema di approssimazione diofantea: "Se P(x) è un polinomio con almeno un coefficiente (che non sia il termine noto) irrazionale, allora per ogni $\varepsilon>0$ esistono interi n,m con $|P(n)-m|<\varepsilon$".
- Teorema di Rado: "Ogni equazione diofantea lineare che ha una somma di alcuni suoi coefficienti uguale a zero, ammette soluzioni monocromatiche per ogni colorazione finita di N".
- Teorema di Szemeredi: "Ogni insieme di naturali con densità superiore positiva contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe" (caso particolare di progressioni di lunghezza 3).
- Teorema di Sarkozy-Furstenberg: "Se A ha densità superiore positiva, allora per ogni polinomio P a coefficienti interi con P(0)=0, esistono a,a' in A con a-a'=P(n) per un opportuno n."
- Teorema di Jin: "se A,B hanno densità superiore positiva, allora A+B è sindetico a tratti".
- Versioni finite dei risultati dimostrati (ad esempio, Teorema di van der Waerden finito: "per ogni r e per ogni k, esiste n tale per ogni r-colorazione di [1,n] esiste una progressione aritmetica monocromatica lunga k").

Il corso si articolerà in lezioni (circa 20 ore) ed esercitazioni (circa 10 ore).
Modalità degli esami: presentazione della risoluzione di esercizi (assegnati con una lezione o due di anticipo); seminario finale su un teorema collegato a quelli presentati nel corso.

Riferimenti:

R. McCutcheon – Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory, LNM 1722, Springer, 1999
I. Protasov – Combinatorics of Numbers, VNTL Publishers, 1997
V. Bergelson – Ergodic Ramsey Theory - an update, in "Ergodic Theory of Z^d-actions (M. Pollicott and K. Schmidt eds.), London Math. Soc. Lecture Note 228, 1996, pp. 1-61
V. Bergelson – Combinatorial and Diophantine Applications of Ergodic Theory, in "Handbook of Dynamical Systems" vol. 1B (B. Hasselblatt and A. Katok eds.), Elsevier, 2006, pp. 745-841.