

Informatica – Matematica Discreta
A.A. 2009/10 - Prima verifica intermedia, 3 Novembre 2009
SOLUZIONI (mdn)

Esercizio 1.

1. Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x, y) = 3x + y^2$. Stabilire se f è iniettiva e stabilire se f è suriettiva.
2. Siano A e B i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}.$$

Si consideri la funzione $h : A \times A \rightarrow B \times B$ definita da $h((x, y)) = (x^2 + y, x + y)$. Discutere la iniettività, suriettività e bigettività di h .

Soluzione. (1). La funzione f non è iniettiva. Infatti per ogni x, y , si ha che $f(x, y) = f(x, -y)$. Ad esempio: $f(0, 1) = 1 = f(0, -1)$. La funzione f è invece suriettiva. Infatti, assegnato $z \in \mathbb{R}$ generico elemento del codominio, basta prendere ad esempio $x = z/3$ e $y = 0$ per avere $f(x, y) = f(z/3, 0) = 3(z/3) + 0^2 = z$.

(2). La funzione h non è suriettiva. Un modo semplice di verificarlo è il seguente. Per ogni $(x, y) \in A \times A$, da $x \geq 1$ segue che $x^2 \geq x$, e quindi vale certamente la disuguaglianza $x^2 + y \geq x + y$. Dunque nessuna coppia $(z, w) \in B \times B$ dove $z < w$ può appartenere all'immagine di h . Vediamo in dettaglio un esempio, e verifichiamo con i calcoli che $(2, 3) \notin \text{Imm}(h)$. Supponiamo per assurdo che esista una coppia $(x, y) \in A \times A$ tale che $h(x, y) = (2, 3)$, cioè $(x^2 + y, x + y) = (2, 3)$, cioè

$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Risolvendo quel sistema, ricaviamo dalla seconda equazione che $y = 3 - x$. Sostituendo nella prima equazione, otteniamo $x^2 + 3 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$, dove quest'ultima equazione non ha soluzioni reali, visto che il suo discriminante $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3$ è negativo.

La funzione h è invece iniettiva. Per dimostrarlo supponiamo che $h(a, b) = h(c, d)$, cioè che $(a^2 + b, a + b) = (c^2 + d, c + d)$, cioè:

$$\begin{cases} a^2 + b = c^2 + d \\ a + b = c + d \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro, otteniamo che

$$a^2 - a = c^2 - c \Leftrightarrow a^2 - c^2 = a - c \Leftrightarrow (a - c)(a + c) = (a - c).$$

Se per assurdo $a - c \neq 0$, potrei dividere entrambi i membri per $a - c$ ed ottenere che $a + c = 1$. Questo non è possibile perchè $a, c \in A \Rightarrow a, c \geq 1 \Rightarrow a + c \geq 2$. Dunque $a - c = 0$ e quindi $a = c$. Sostituendo nella seconda equazione del sistema di sopra, si ricava poi che $a + b = a + d$, da cui

$b = d$. Concludiamo che $(a, b) = (c, d)$, come voluto. Riassumendo, h è iniettiva ma non suriettiva, dunque non è bigettiva.

Esercizio 2.

Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale la disuguaglianza $3^n > 2^n + n^2$.

Soluzione. Quando $n = 2$, si ottiene la disuguaglianza $3^2 > 2^2 + 2^2$, cioè $9 > 8$. Quindi la base induttiva è verificata. Passiamo ora al passo induttivo. Prendiamo un generico $k \geq 2$, e assumiamo per ipotesi induttiva che valga la disuguaglianza $3^k > 2^k + k^2$. Dobbiamo dimostrare che allora vale anche la disuguaglianza $3^{k+1} > 2^{k+1} + (k+1)^2$.

$$\begin{cases} \text{Ipotesi induttiva: } 3^k > 2^k + k^2 & \text{(la assumiamo come vera)} \\ \text{Tesi induttiva: } 3^{k+1} \stackrel{?}{>} 2^{k+1} + (k+1)^2 & \text{(dobbiamo dimostrarla)} \end{cases}$$

Procediamo in questo modo: $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k >$ (per ipotesi induttiva) $> 3 \cdot (2^k + k^2)$. Se fosse vero che $3 \cdot (2^k + k^2) \geq 2^{k+1} + (k+1)^2$, allora, per la proprietà transitiva della relazione d'ordine $>$, avrei ottenuto la tesi. In altre parole, per ottenere la tesi è sufficiente verificare che per ogni $k \geq 2$, vale la seguente disuguaglianza:

$$3 \cdot (2^k + k^2) \stackrel{?}{\geq} 2^{k+1} + (k+1)^2.$$

Svolgiamo i calcoli: $3 \cdot (2^k + k^2) \geq 2^{k+1} + (k+1)^2 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^k + 3k^2 \geq 2 \cdot 2^k + k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k + 3k^2 - k^2 \geq 2k + 1 \Leftrightarrow 2^k + 2k^2 \geq 2k + 1$. Quest'ultima disuguaglianza è certamente verificata per ogni $k \geq 2$. Infatti, banalmente $2^k \geq 2^2 > 1$; e inoltre $2k^2 = 2 \cdot k \cdot k \geq 2 \cdot 2 \cdot k = 4k > 2k$.

Esercizio 3. Considerare i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 100\}; \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} \ 3y = x\}; \quad C = \{2x + 1 \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

1. Elencare gli elementi degli insiemi $A \cap B$, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(C)$, $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(B)$.
2. Stabile se ciascuna delle seguenti proprietà è vera o falsa, dove $E = \mathcal{P}(\mathbb{N})$:
 - $\forall Y \in E \ \exists X \in E \ \mathbb{N} \setminus X = Y$
 - $\exists Y \in E \ \forall X \in E \ X \subseteq Y$
 - $\forall X \in E \ \forall Y \in E \ (\mathbb{N} \setminus X) \cap Y = \mathbb{N} \setminus (X \cap (\mathbb{N} \setminus Y))$

Soluzione. (1). In base alle definizioni, si ricava che $A = \{-9, -8, \dots, 8, 9\}$ contiene tutti i numeri interi x tali che $-10 < x < 10$; $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ contiene tutti i multipli di 3; e infine $C = \{3, 5, 7, 9, 11\}$. Allora abbiamo che:

- L'intersezione $A \cap B$ contiene gli elementi di A che sono multipli di 3, dunque

$$A \cap B = \{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\}.$$

- L'intersezione $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(C)$ contiene tutti quei sottoinsiemi di A e che sono anche sottoinsiemi C . In altre parole, $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(C)$ se e solo se $X \subseteq A$ e $X \subseteq C$. Ma X è sottoinsieme sia di A che di C se e solo se i suoi elementi appartengono sia ad A che a C , cioè se e solo se $X \subseteq A \cap C$. Concludiamo che $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(A \cap C) = \mathcal{P}(\{3, 5, 7, 9\})$, e perciò $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(C)$ contiene i seguenti 16 elementi:

$$\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{9\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{5, 7, 9\}, \{3, 5, 7, 9\}.$$

- Un insieme X appartiene a $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(B)$ se e solo se X è un sottoinsieme di C ma non un sottoinsieme di B . In altre parole, X deve essere un sottoinsieme di C ma non di $C \cap B$. Dunque gli elementi di $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(C \cap B) = \mathcal{P}(C) \setminus \{\emptyset, \{3\}, \{9\}, \{3, 9\}\}$ sono i seguenti:

$\{5\}, \{7\}, \{11\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 11\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{5, 11\}, \{7, 9\}, \{7, 11\}, \{9, 11\},$

$\{3, 5, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{3, 5, 11\}, \{3, 7, 9\}, \{3, 7, 11\}, \{3, 9, 11\},$

$\{3, 5, 7, 9\}, \{3, 5, 7, 11\}, \{3, 5, 9, 11\}, \{3, 7, 9, 11\}, \{5, 7, 9, 11\}, \{3, 5, 7, 9, 11\}$

(2). Il primo enunciato: “ $\forall Y \in E \exists X \in E \mathbb{N} \setminus X = Y$ ” è vero. Infatti, assegnato un qualunque $Y \subseteq \mathbb{N}$, si può prendere come X il suo complementare, cioè $X = \overline{Y} = \mathbb{N} \setminus Y$. Risulta così verificato che $\mathbb{N} \setminus X = Y$.

Anche il secondo enunciato “ $\exists Y \in E \forall X \in E X \subseteq Y$ ” è vero. Basta infatti prendere $Y = \mathbb{N}$, e la proprietà $X \subseteq Y$ è banalmente verificata per ogni $X \in E$.

Infine, il terzo enunciato “ $\forall X \in E \forall Y \in E (\mathbb{N} \setminus X) \cap Y = \mathbb{N} \setminus (X \cap (\mathbb{N} \setminus Y))$ ” è falso. Per dimostrare questo, basta un controesempio: se prendiamo $X = Y = \emptyset$, abbiamo che $(\mathbb{N} \setminus X) \cap Y = (\mathbb{N} \setminus \emptyset) \cap \emptyset = \emptyset$, mentre $\mathbb{N} \setminus (X \cap (\mathbb{N} \setminus Y)) = \mathbb{N} \setminus (\emptyset \cap (\mathbb{N} \setminus \emptyset)) = \mathbb{N} \setminus \emptyset = \mathbb{N}$.