

**Informatica – Matematica Discreta**  
A.A. 2009/10 - Seconda verifica intermedia, 17 Dicembre 2009  
SOLUZIONI (*mdn*)

**Esercizio 1.** Si trovino tutte le soluzioni della equazione diofantea:

$$316x + 187y = 25$$

**Soluzione.** Ricordiamo che un'equazione diofantea lineare  $ax + by = c$  ammette soluzioni se e solo se il M.C.D. tra  $a$  e  $b$  divide il termine noto  $c$ . Come prima cosa, calcoliamo il M.C.D.  $(316, 187)$ . Usando l'algoritmo di Euclide, si ottiene:

$$129 = 316 - 187; \quad 58 = 187 - 129; \quad 13 = 129 - 2 \cdot 58; \quad 6 = 58 - 4 \cdot 13; \quad 1 = 13 - 2 \cdot 6.$$

Visto che il M.C.D.  $(316, 187) = 1$  e che banalmente 1 divide 25, la nostra equazione diofantea ha soluzioni. Per trovarle esplicitamente, usiamo intanto le divisioni di sopra per ricavare il M.C.D. 1 come combinazione lineare di 316 e 187. Si ottiene la seguente tabella:

	316	187
316	1	0
187	0	1
129	1	-1
58	-1	2
13	3	-5
6	-13	22
1	29	-49

Abbiamo così ricavato l'uguaglianza  $1 = 316 \cdot 29 + 187 \cdot (-49)$ , da cui:

$$25 = 316 \cdot (29 \cdot 25) + 187 \cdot ((-49) \cdot 25).$$

Dunque la coppia  $(\bar{X}, \bar{Y})$  dove  $\bar{X} = 29 \cdot 25 = 725$  e  $\bar{Y} = (-49) \cdot 25 = -1225$ , è una *soluzione particolare* dell'equazione diofantea  $316x + 187y = 25$ .

Ricordiamo che *tutte* le soluzioni  $(x, y)$  si ottengono come somma di una fissata soluzione particolare con una soluzione dell'*equazione omogenea associata*, cioè di  $316x + 187y = 0$ . Visto che 316 e 187 sono primi tra loro, le soluzioni di quest'ultima sono le tutte e sole le coppie della forma  $(187k, -316k)$ , al variare di  $k \in \mathbb{Z}$ . In conclusione, l'insieme  $\mathcal{S}$  delle soluzioni  $(x, y)$  della nostra equazione diofantea  $316x + 187y = 25$ , è il seguente:

$$\mathcal{S} = \{(725 + 187k, -1225 - 316k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Esercizio 2.** Ad una gara di sci hanno partecipato 80 atleti, 8 per ciascuna delle 10 squadre nazionali schierate (fra le quali c'è anche la squadra italiana). L'ordine di arrivo ufficiale include solo i primi 15 atleti classificati.

- (a) Quanti sono i possibili ordini di arrivo ?
- (b) Quanti dei possibili ordini di arrivo contengono almeno due atleti italiani ?

- (c) Quanti dei possibili ordini di arrivo contengono esattamente cinque atleti italiani ?  
 (d) In quanti dei possibili ordini di arrivo compaiono atleti di esattamente due squadre ?

**Soluzione.**

(a). Si tratta di contare le funzioni iniettive dall'insieme delle prime 15 posizioni di arrivo nell'insieme degli 80 partecipanti (cioè si tratta di contare le cosiddette *disposizioni senza ripetizione*  $D_{80,15}$ ). Equivalentemente, dobbiamo scegliere 15 atleti tra gli 80 partecipanti, e questo può essere fatto in  $\binom{80}{15}$  modi diversi, e poi disporli nell'ordine d'arrivo (qui l'ordine conta!). Ricordiamo che per ogni scelta dei 15 atleti, ci sono  $15!$  modi diversi di metterli in ordine. Dunque, la risposta è la seguente:

$$D_{80,15} = 80 \cdot 79 \cdot \dots \cdot 65 \cdot 66 = \binom{80}{15} \cdot 15!$$

(b). Conviene ragionare per negazione, e togliere dal numero totale degli arrivi quelli dove non compare alcun italiano, e quelli dove compare esattamente un italiano. Gli arrivi dove non compaiono italiani si calcolano nello stesso modo di sopra, con la differenza che adesso abbiamo a disposizione solo i 72 atleti *non* italiani, quindi sono  $72 \cdot \dots \cdot 58 = \binom{72}{15} \cdot 15!$ . Per contare gli arrivi dove compare esattamente un italiano si può ragionare così. Ci sono 8 modi di scegliere quale italiano comparirà tra i primi 15; per ognuna di queste scelte ci sono 15 modi di scegliere quale sarà la sua posizione di arrivo; infine, dobbiamo contare in quanti modi si possono disporre nell'ordine i rimanenti 14 atleti non italiani nelle rimanenti 14 posizioni di arrivo (e per quest'ultimo calcolo si procede come già fatto sopra). Quindi il numero cercato è:

$$80 \cdot \dots \cdot 66 - 72 \cdot \dots \cdot 58 - 8 \cdot 15 \cdot (72 \cdot \dots \cdot 59) = \binom{80}{15} \cdot 15! - \binom{72}{15} \cdot 15! - 8 \cdot 15 \cdot \binom{72}{14} \cdot 14!$$

(c). Abbiamo  $\binom{8}{5}$  modi di scegliere i cinque atleti italiani, e per ognuna di queste scelte abbiamo  $\binom{72}{10}$  modi di scegliere i rimanenti 10 atleti tra i 72 non italiani. Infine, una volta scelti i 15 atleti, dobbiamo considerare che questi possono essere disposti in  $15!$  modi diversi nelle posizioni di arrivo. Quindi:

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{72}{10} \cdot 15!$$

Un modo equivalente di contare lo stesso numero è il seguente. Ci sono  $\binom{15}{5}$  modi possibili di scegliere quali 5 posizioni tra le prime 15 riservare agli italiani. Per ognuna di queste scelte, ci sono  $D_{8,5} = 8 \cdot \dots \cdot 4$  modi di disporre nell'ordine 5 atleti italiani (tra gli 8 disponibili) in quelle 5 posizioni, e ci sono  $D_{72,10} = 72 \cdot \dots \cdot 63$  modi di disporre nell'ordine 10 atleti non italiani (tra i 72 disponibili) nelle rimanenti 10 posizioni. Dunque:

$$\binom{15}{5} \cdot (8 \cdot \dots \cdot 4) \cdot (72 \cdot \dots \cdot 63).$$

Come si può verificare direttamente, le due espressioni che abbiamo trovato determinano lo stesso numero.

(d). Ci sono  $\binom{10}{2}$  modi di scegliere le 2 squadre i cui atleti compariranno in classifica. Per ognuna di queste scelte, ci sono  $D_{16,15} = 16 \cdot \dots \cdot 2$  modi di disporre nell'ordine 15 atleti tra i 16 delle due squadre considerate. Osserviamo che il caso in cui compaiono all'arrivo atleti di una sola delle due squadre non può capitare (ogni squadra consiste soltanto di 8 atleti!). Dunque:

$$\binom{10}{2} \cdot (16 \cdot \dots \cdot 2) = \binom{10}{2} \cdot 16!$$

Un modo equivalente di procedere è il seguente. Una volta scelte le due squadre, nell'ordine di arrivo ci saranno necessariamente 7 atleti della prima e 8 atleti dell'altra, o viceversa, 8 atleti della prima e 7 della seconda. Consideriamo il primo caso (il secondo è del tutto analogo). Per ognuna delle  $\binom{10}{2}$  scelte delle due squadre, ci sono  $\binom{15}{7}$  modi di scegliere le 7 posizioni riservate agli atleti della prima squadra, poi ci sono  $D_{8,7} = 8 \cdot \dots \cdot 2 = 8!$  modi di disporre nell'ordine 7 atleti della prima squadra, e infine ci sono  $D_{8,8} = 8!$  modi di disporre nell'ordine gli 8 atleti della seconda squadra nelle 8 posizioni rimanenti. Per ottenere il totale basta moltiplicare tutto per 2, visto che i due casi sono perfettamente simmetrici. Abbiamo dunque:

$$2 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{15}{7} \cdot 8! \cdot 8!$$

Si può verificare che le due espressioni trovate determinano lo stesso numero.

**Esercizio 3.** Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 25(a_n)^2 - 7a_{n-1} \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

- a) Dimostrare che  $\text{MCD}(a_n, 7) = 1$  per ogni  $n \geq 0$ .  
b) Studiare la successione  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dove  $r_n$  è il resto della divisione euclidea di  $a_n$  per 7.

**Soluzione.**

(a). Visto che 7 è un numero primo,  $\text{MCD}(a_n, 7) = 1$  equivale a dire che  $a_n$  non è multiplo di 7. Procediamo per induzione su  $n$  (come vedremo, non ci sarà bisogno di usare l'induzione forte). La base induttiva  $n = 0$  è banale perché  $a_0 = 1$  non è multiplo di 7. Supponiamo adesso per ipotesi induttiva che  $a_n$  non sia multiplo di 7. Dobbiamo dimostrare che anche  $a_{n+1}$  non è multiplo di 7. Se per assurdo  $a_{n+1}$  fosse invece multiplo di 7, cioè se  $a_{n+1} = 25(a_n)^2 - 7a_{n-1} \equiv 0 \pmod{7}$ , allora seguirebbe che  $4(a_n)^2 \equiv 0 \pmod{7}$ , e quindi, visto che 4 e 7 sono primi tra loro, avremmo  $(a_n)^2 \equiv 0 \pmod{7}$ . Questo è assurdo perché per ipotesi induttiva  $a_n$  non è divisibile per il numero primo 7, e dunque non lo è nemmeno  $(a_n)^2$ .<sup>1</sup>

(b). Intanto, chiaramente  $r_0 = r_1 = 1$ . In generale, per calcolare i resti delle divisioni per 7, risulta utile considerare le congruenze modulo 7, visto che  $r_n \equiv a_n \pmod{7}$ . Iniziamo con qualche calcolo.  $r_2 \equiv a_2 = 25(a_1)^2 - 7a_0 \equiv 4 \cdot (r_1)^2 \equiv 4 \cdot 1^2 \equiv 4 \pmod{7}$ . Poi,  $r_3 \equiv a_3 = 25(a_2)^2 - 7a_1 \equiv 4 \cdot (r_2)^2 \equiv 4 \cdot 4^2 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$ . Procedendo, si osserva che i resti sono alternativamente 1 e 4. Ad esempio,  $r_4 \equiv a_4 = 25(a_3)^2 - 7a_2 \equiv 4 \cdot (r_3)^2 \equiv 4 \cdot 1^2 = 4 \equiv 1 \pmod{7}$ , ecc. La congettura è dunque la seguente:

- Per ogni  $n > 0$ , il resto  $r_n = 1$  se  $n$  è dispari, e il resto  $r_n = 4$  se  $n$  è pari.

Dimostriamo ora questa proprietà, procedendo per induzione. La base di induzione è ovvia perché  $r_1 = 1$ . Consideriamo ora il passo induttivo, e prendiamo un generico  $r_{k+1}$  con  $k > 0$ . Distinguiamo due casi. Se  $k+1$  è pari, allora  $k$  è dispari, e per ipotesi induttiva sappiamo che  $r_k = 1$ . Dunque  $r_{k+1} \equiv a_{k+1} = 25(a_k)^2 - 7a_{k-1} \equiv 4(r_k)^2 = 4 \pmod{7}$ , e la tesi è dimostrata. Se invece  $k+1$  è dispari, allora  $k$  è pari e, per ipotesi induttiva,  $r_k = 4$ . In questo caso,  $r_{k+1} \equiv a_{k+1} = 25(a_k)^2 - 7a_{k-1} \equiv 4(r_k)^2 \equiv 4 \cdot 4^2 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$ .

<sup>1</sup> Se anziché 7 consideravamo un numero non primo, quest'ultima deduzione non sarebbe stata corretta. Ad esempio, 4 non divide 6, ma 4 divide  $6^2 = 36$ .