

**Università di Pisa**  
**Dipartimento di Matematica**  
**Corsi di Laurea e di Laurea Magistrale in Matematica**  
**Anno accademico 2014/2015**  
**Scheda di un insegnamento attivato**

**Ultrafiltri e Metodi Nonstandard (UMN)**  
**Mauro Di Nasso – [dinasso@dm.unipi.it](mailto:dinasso@dm.unipi.it)**

**Codice dell'insegnamento:** 230AA  
**Valore in CFU:** 6  
**Settore scientifico-disciplinare:**  
**Numero di ore di didattica frontale:** 48  
**Semestre di svolgimento:** II  
**Sito web dell'insegnamento:** <http://www.dm.unipi.it/~dinasso/didattica.html>

**Università di Pisa**  
**Dipartimento di Matematica**  
**Corsi di Laurea e di Laurea Magistrale in Matematica**  
**Anno accademico 2014/2015**  
**Informazioni su un insegnamento attivato**

**Nome dell'insegnamento:** Ultrafiltri e Metodi Nonstandard (UMN)

**Docente titolare:** Mauro Di Nasso

**Programma previsto:**

*Parte 1: Ultrafiltri.* Filtri e ultrafiltri. Prodotto tensore tra ultrafiltri. Limiti in topologia lungo ultrafiltri e relativa caratterizzazione della compattezza. Teorema dei tre colori (se  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  non ha punti fissi, allora esiste una 3-colorazione tale che  $n$  ed  $f(n)$  hanno sempre colori diversi). Immagini di ultrafiltri, isomorfismo tra ultrafiltri, preordine di Rudin-Keisler. Lo spazio topologico  $\beta\mathbb{N}$  degli ultrafiltri su  $\mathbb{N}$  come compattificazione di Stone-Cěch dello spazio discreto  $\mathbb{N}$ . Ultrafiltri selettivi e ultrafiltri P-points.

*Parte 2: Combinatoria dei numeri.* Teorema di Ramsey finito e infinito. Insiemi di somme e di differenze. Teorema combinatorio di Schur, ed esistenza di soluzioni non banali all'equazione di Fermat per campi finiti sufficientemente grandi. Principio di compattezza combinatoria. La pseudo-somma in  $\beta\mathbb{N}$  e relativa struttura di semigruppato topologico destro compatto. Teorema di Ellis e esistenza di ultrafiltri idempotenti. Teorema di Hindman additivo e moltiplicativo. Versione simultaneamente additiva e moltiplicativa del Teorema di Hindman. Ideali sinistri in  $\beta\mathbb{N}$ . Ideali minimali ed ultrafiltri minimali. L'ideale bilatero minimo  $K$ . Un insieme che appartiene ad un ultrafiltro minimale contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe. Teorema di van der Waerden. Regolarità per partizione debole e forte e relative caratterizzazioni mediante ultrafiltri.

*Parte 3: Analisi nonstandard.* Introduzione all'analisi nonstandard. Campi super-reali, numeri infinitesimi ed infiniti, parte standard di un numero finito. Costruzione di ultraprodotto. Numeri iperreali come ultrapotenza dei reali. Numeri ipernaturali, iperrazionali, ecc. La mappa  $*$  (estensione non-standard) e il principio di transfer. Esempi di uso dell'analisi nonstandard

per la dimostrazione di alcuni risultati fondamentali del calcolo: Teorema di Heine-Cantor, Teorema di Weierstrass, regola di Leibniz. Insiemi interni, proprietà di overspill, underspill e saturazione. Insiemi iperfiniti.

*Parte 4: Applicazioni in teoria combinatoria dei numeri.* Densità asintotica inferiore e superiore. Insieme spesso, sindetico, sindetico a tratti. Se un insieme  $A$  ha densità positiva, allora l'insieme di differenze  $A - A$  incontra ogni insieme  $X - X$  con  $X$  infinito, e in particolare è sindetico. Gli insiemi sindetici a tratti sono regolari per partizione. Caratterizzazioni nonstandard degli insiemi spessi, sindetici, sindetici a tratti. Insiemi additivamente grandi, insiemi AP-rich (cioè contenenti progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe) e loro regolarità per partizioni. Relazione di finita immergibilità tra insiemi di interi, e relative proprietà. Lemma di Fekete, densità di Banach e sua caratterizzazione nonstandard. Teorema di Jin: l'insieme somma  $A + B$  di due insiemi con densità di Banach positiva è sindetico a tratti (dimostrazione nonstandard). Ultrafiltri generati da numeri ipernaturali e la relativa mappa tra  ${}^*\mathbb{N}$  e  $\beta\mathbb{N}$ . Dimostrazione nonstandard che il centro di  $\beta\mathbb{N}$  contiene solo gli ultrafiltri principali. Sistemi dinamici discreti, punti di ricorrenza, di uniforme ricorrenza. Teorema di Birkhoff. Il sistema dinamico  $(\beta\mathbb{N}, S)$  dove  $S : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$  è l'operatore "shift". Gli ultrafiltri minimali sono i punti di uniforme ricorrenza di  $(\beta\mathbb{N}, S)$ . Caratterizzazione nonstandard della regolarità per partizione di equazioni. Dimostrazione nonstandard del teorema di Rado sulla regolarità per partizione di equazioni diofantee lineari. Il caso non lineare. Discussione di problemi aperti.

**Testi consigliati:** W. Comfort, S. Negropontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag; V. Bergelson, *Ergodic Ramsey Theory – an update*, in "Ergodic Theory of  $\mathbb{Z}^d$ -actions" (M. Pollicott and K. Schmidt eds.), London Math. Soc. Lecture Note Series 228 (1996), pp. 1-61; R. McCutcheon, *Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory*, Springer; I. Protasov, *Combinatorics of Numbers*, VNTL Publishers; R. Goldblatt, *Lectures on the Hyperreals*, Springer.

**Modalità d'esame:** Risoluzione di esercizi assegnati durante il corso, seminario su argomento concordato, colloquio orale finale solo sugli argomenti non già coperti dagli esercizi svolti e dal seminario.

**Altre informazioni:** A seconda degli interessi degli studenti, lo sviluppo del programma potrà concentrarsi su alcuni degli argomenti previsti a scapito di altri.