Tagli di Dedekind su gruppi Abeliani ordinati

Antongiulio Fornasiero
fornasiero@mail.dm.unipi.it
Marcello Mamino
m.mamino@sns.it

Università di Pisa

Incontro Italiano Insiemi e Modelli
Torino, Aprile 2007

Introduzione

Sia G un insieme linearmente ordinato. Un taglio di Dedekind su G è una partizione di G

$$\Lambda := (\Lambda^{\mathrm{L}} \mid \Lambda^{\mathrm{R}})$$

tale che $\Lambda^L < \Lambda^R$ (cioè, $x < y$ per ogni $x \in \Lambda^L$ e $y \in \Lambda^R$).
$\widehat{G}$ denoterà l'insieme dei tagli (di Dedekind) su G.
$\widehat{G}$ ha un ordine naturale, indotto dall'ordine di G.

Introduzione

Sia G un insieme linearmente ordinato. Un taglio di Dedekind su G è una partizione di G

$$\Lambda := (\Lambda^{\mathrm{L}} \mid \Lambda^{\mathrm{R}})$$

tale che $\Lambda^L < \Lambda^R$ (cioè, $x < y$ per ogni $x \in \Lambda^L$ e $y \in \Lambda^R$).
$\widehat{G}$ denoterà l'insieme dei tagli (di Dedekind) su G.
$\widehat{G}$ ha un ordine naturale, indotto dall'ordine di G.
Se inoltre G è un gruppo Abeliano ordinato, le operazioni $+$ e $-$ su G inducono delle operazioni su $\widehat{G}$. Studieremo la struttura del primo ordine risultante, e daremo un'assiomatizzazione per la sua parte universale.

Introduzione

Sia G un insieme linearmente ordinato. Un taglio di Dedekind su G è una partizione di G

$$\Lambda := (\Lambda^{L} \mid \Lambda^{R})$$

tale che $\Lambda^L < \Lambda^R$ (cioè, $x < y$ per ogni $x \in \Lambda^L$ e $y \in \Lambda^R$).
$\widehat{G}$ denoterà l'insieme dei tagli (di Dedekind) su G.
$\widehat{G}$ ha un ordine naturale, indotto dall'ordine di G.
Se inoltre G è un gruppo Abeliano ordinato, le operazioni $+$ e $-$ su G inducono delle operazioni su $\widehat{G}$. Studieremo la struttura del primo ordine risultante, e daremo un'assiomatizzazione per la sua parte universale.

G gruppo Abeliano ordinato vuol dire che G è un gruppo Abeliano, è linearmente ordinato, e l'ordine è compatibile con le operazioni di gruppo.

Sommario

1. Tagli di Dedekind
   - Definizioni e fatti di base
2. Scrolls
   - Definizioni e fatti elementari
   - Ampiezza
   - Classificazione
   - Costruzioni
   - Regole di calcolo
3. Assiomatizzazione
   - Dettagli della dimostrazione

Definizioni: ordine, piú e meno

$G = (G, 0, +, -, <)$ è un gruppo Abeliano ordinato,
$\Gamma = (\Gamma^{\mathrm{L}} \mid \Gamma^{\mathrm{R}})$ e $\Lambda = (\Lambda^{\mathrm{L}} \mid \Lambda^{\mathrm{R}})$ sono tagli su G.

$$\Lambda \leq \Gamma \quad \text{sse} \quad \Lambda^L \subseteq \Gamma^L;$$
$$-\Lambda := (-\Lambda^{\mathrm{R}} \mid -\Lambda^{\mathrm{L}}).$$

Somma "a sinistra" e somma "a destra": il lato sinistro di $\Lambda +^{\mathrm{L}} \Gamma$ è

$$(\Lambda +^{\mathrm{L}} \Gamma)^{\mathrm{L}} := \Lambda^{\mathrm{L}} + \Gamma^{\mathrm{L}} = \left\{ x + y : x \in \Lambda^{\mathrm{L}}, y \in \Gamma^{\mathrm{L}} \right\};$$

il lato destro di $\Lambda +^{\mathrm{R}} \Gamma$ è

$$(\Lambda +^{\mathrm{R}} \Gamma)^{\mathrm{R}} := \Lambda^{\mathrm{R}} + \Gamma^{\mathrm{R}}.$$

Definizioni: ordine, piú e meno

$G = (G, 0, +, -, <)$ è un gruppo Abeliano ordinato,
$\Gamma = (\Gamma^{\mathrm{L}} \mid \Gamma^{\mathrm{R}})$ e $\Lambda = (\Lambda^{\mathrm{L}} \mid \Lambda^{\mathrm{R}})$ sono tagli su G.

$$\Lambda \leq \Gamma \quad \text{sse} \quad \Lambda^L \subseteq \Gamma^L;$$
$$-\Lambda := (-\Lambda^{\mathrm{R}} \mid -\Lambda^{\mathrm{L}}).$$

Somma "a sinistra" e somma "a destra": il lato sinistro di $\Lambda +^{\mathrm{L}} \Gamma$ è

$$(\Lambda +^{\mathrm{L}} \Gamma)^{\mathrm{L}} := \Lambda^{\mathrm{L}} + \Gamma^{\mathrm{L}} = \left\{x + y : x \in \Lambda^{\mathrm{L}}, y \in \Gamma^{\mathrm{L}}\right\};$$

il lato destro di $\Lambda +^{\mathrm{R}} \Gamma$ è

$$(\Lambda +^{\mathrm{R}} \Gamma)^{\mathrm{R}} := \Lambda^{\mathrm{R}} + \Gamma^{\mathrm{R}}.$$

G agisce su $\widehat{G}$ tramite l'azione

$$a + \Lambda := (a + \Lambda^{\mathrm{L}} \mid a + \Lambda^{\mathrm{R}}).$$

Per ogni $a \in G$, definiamo

$$a^- := ((-\infty, a) \mid [a, +\infty)); \quad a^+ := ((-\infty, a] \mid (a, +\infty)).$$

Fatti di base

- $\widehat{G}$ con la topologia d'ordine è Hausdorff è compatto.
- $(\widehat{G}, \leq, +^{\mathrm{L}})$ è un monoide Abeliano ordinato, con elemento neutro 0^{+}.
- $-(-\Lambda) = \Lambda$.
- $a^{-} < a^{+}$.
- $\Lambda +^{\mathrm{L}} \Gamma \leq \Lambda +^{\mathrm{R}} \Gamma$.

Esempi

Gruppi e tagli

G	$\widehat{G}$
$\mathbb{R}$	$\left\{a^\pm : a \in \mathbb{R}\right\} \sqcup \left\{\pm\infty\right\}$
$\mathbb{Q}$	$\left\{a^\pm : a \in \mathbb{Q}\right\} \sqcup \left\{b : b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right\} \sqcup \left\{\pm\infty\right\}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \sqcup \left\{\pm\infty\right\}$, tramite l'identificazione $n \mapsto n^+$ ($+$ diventa $+^{\mathrm{L}}$).

$G = \mathbb{Q}$

$$
\begin{aligned}
a^+ +^{\mathrm{L}} a'^+ &= (a + a')^+ \\
a^\pm +^{\mathrm{L}} a'^- &= (a + a')^- \\
a^\pm +^{\mathrm{L}} b &= a + b \\
b +^{\mathrm{L}} b' &= \begin{cases} b + b' & \text{se } b + b' \notin \mathbb{Q} \\ (b + b')^- & \text{altrimenti,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$a, a' \in \mathbb{Q}, \quad b, b' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Assiomi

$(M, \leq, \mathbf{0}, +, -)$ è un pre-scroll se:

1. $(M, \leq, \mathbf{0}, +)$ è un monoide commutativo ordinato;
2. $-$ è un anti-isomorfismo di $(M, \leq)$ che soddisfa $-(-x) = x$.

Definiamo $x +^{\mathrm{R}} y := -\big((-x) + (-y)\big)$,
$x - y := x +^{\mathrm{R}} (-y)$, $|x| := \max(x, -x)$.
M è uno scroll se valgono i seguenti assiomi:

- SA $-\mathbf{0} \leq \mathbf{0}$;
- SB $|x| \geq \mathbf{0}$;
- SC $x < y$ sse $x - y \leq \mathbf{0}$.

Assiomi

$(M, \leq, \mathbf{0}, +, -)$ è un pre-scroll se:

1. $(M, \leq, \mathbf{0}, +)$ è un monoide commutativo ordinato;
2. $-$ è un anti-isomorfismo di $(M, \leq)$ che soddisfa $-(-x) = x$.

Definiamo $x +^{\mathrm{R}} y := -\big((-x) + (-y)\big)$,
$x - y := x +^{\mathrm{R}} (-y)$, $|x| := \max(x, -x)$.
M è uno scroll se valgono i seguenti assiomi:

- SA $-\mathbf{0} \leq \mathbf{0}$;
- SB $|x| \geq \mathbf{0}$;
- SC $x < y$ sse $x - y \leq \mathbf{0}$.

1. Cioè $+$ è associativa, commutativa, con elemento neutro $\mathbf{0}$. Inoltre, $\leq$ è un ordine totale su M compatibile con la somma.

Esempi

- $M = G$;
- $M = \widehat{G}, \quad + := +^{\mathrm{L}}, \quad \mathbf{0} := 0^+$;
- $M = \tilde{G} := \widehat{G} \sqcup G$, con $a^- < a < a^+, \quad \mathbf{0} := -\mathbf{0} = 0$;
- Scroll triviale: sia N insieme totalmente ordinato con minimo $\mathbf{0}$, $M = N \sqcup (-N)$,

$$x + y := \begin{cases} x & \text{se } |x| > |y|; \\ y & \text{se } |x| < |y|; \\ \min(x, y) & \text{se } |x| = |y|. \end{cases}$$

Fatti di base

- Gli assiomi sono universali. Perciò, una sotto-struttura di uno scroll è ancora uno scroll.
- Gli assiomi sono auto-duali: cioè, se $(M, \leq, \mathbf{0}, +, -)$ è uno scroll, anche il suo duale $(M, \geq, -\mathbf{0}, +^{\mathrm{R}}, -)$ è uno scroll.
- L'intervallo $(-\mathbf{0}, \mathbf{0})$ è vuoto.

Ampiezza

Definiamo $\widehat{x} := x - x$, l'ampiezza di x.

Fatti

$$
\begin{aligned}
\widehat{x} &\geq 0 \\
\widehat{x} &= \max\left\{ y \in M : y + x \leq x \right\} \\
\widehat{\widehat{x}} &= \widehat{-x} = \widehat{x} \\
\widehat{x+y} &= \max(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{x} + \widehat{y}.
\end{aligned}
$$

Se $M = \widehat{G}$, l'insieme

$$
\mathcal{G}(\Lambda) := \left\{ x \in G : x + \Lambda = \Lambda \right\}
$$

è un sottogruppo convesso di G, il gruppo invariante di Λ, e $\mathcal{G}(\Lambda) = (-\widehat{\Lambda}, \widehat{\Lambda})$.

Esempi

- Se G è Archimedeo (per es. $G = \mathbb{Q}$), allora $\widehat{\Lambda} = 0^+$ per ogni $\Lambda \in \widehat{G} \setminus \left\{\pm\infty\right\}$, e $\widehat{\pm\infty} = +\infty$;
- G è non-Archimedeo sse esiste $\Lambda \in \widehat{G} \setminus \left\{\pm\infty\right\}$ tale che $\widehat{\Lambda} > 0^+$;
- Se $G = G_1 \times G_2$, con l'ordine lessicografico, e $\Omega := \sup\left\{(0,x) : x \in G_2\right\}$, allora $\widehat{\Omega} = \Omega > 0^+$.

Esempi

- Se G è Archimedeo (per es. $G = \mathbb{Q}$), allora $\widehat{\Lambda} = 0^+$ per ogni $\Lambda \in \widehat{G} \setminus \left\{ \pm\infty \right\}$, e $\widehat{\pm\infty} = +\infty$;
- G è non-Archimedeo sse esiste $\Lambda \in \widehat{G} \setminus \left\{ \pm\infty \right\}$ tale che $\widehat{\Lambda} > 0^+$;
- Se $G = G_1 \times G_2$, con l'ordine lessicografico, e $\Omega := \sup\left\{ (0, x) : x \in G_2 \right\}$, allora $\widehat{\Omega} = \Omega > 0^+$.

Il supremum di $X \subseteq G$ definisce un taglio su $\widehat{G}$.

Classificazione degli scrolls

Definizione-lemma

Ogni scroll ricade in esattamente uno dei tipi seguenti:

- Tipo 0, se $\mathbf{0} = -\mathbf{0}$;
- Tipo denso, se $\mathbf{0} > -\mathbf{0}$ e $\mathbf{0} +^{\mathrm{R}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- Tipo discreto, se $\mathbf{0} > -\mathbf{0}$ e $\mathbf{0} +^{\mathrm{R}} \mathbf{0} > \mathbf{0}$.

Esempi

- G e $\tilde{G}$ sono di tipo 0;
- Se G è un gruppo denso, allora $\widehat{G}$ è di tipo denso;
- Se G è un gruppo discreto, allora $\widehat{G}$ è di tipo discreto.

Sotto-scroll, Quozienti e Omomorfismi

Sia $M \subseteq N$ un sotto-scroll. Il quoziente N/M è sempre di tipo 0.

Dato un omomorfismo di scroll $\phi : M \to N$, o ϕ è iniettivo, oppure N è di tipo 0 e ϕ si fattorizza tramite la proiezione canonica $M \to M/\ker\phi$.

Sotto-scroll, Quozienti e Omomorfismi

Sia $M \subseteq N$ un sotto-scroll. Il quoziente N/M è sempre di tipo 0.

Dato un omomorfismo di scroll $\phi : M \to N$, o ϕ è iniettivo, oppure N è di tipo 0 e ϕ si fattorizza tramite la proiezione canonica $M \to M/\ker\phi$.

Sia $S \subseteq M$ un insieme di ampiezze ($\widehat{x} = x$ per ogni $x \in S$) con un minimo k.

$$M^{\{S\}} := \left\{ x \in M : \widehat{x} \in S \right\}$$

è uno scroll (il cui el. neutro è k), ed è un sotto-scroll di M se $\mathbf{0} = k$.

Sotto-scroll, Quozienti e Omomorfismi

Sia $M \subseteq N$ un sotto-scroll. Il quoziente N/M è sempre di tipo 0.
Dato un omomorfismo di scroll $\phi : M \to N$, o ϕ è iniettivo, oppure N è di tipo 0 e ϕ si fattorizza tramite la proiezione canonica $M \to M/\ker\phi$.
Sia $S \subseteq M$ un insieme di ampiezze ($\widehat{x} = x$ per ogni $x \in S$) con un minimo k.

$$M^{\{S\}} := \left\{ x \in M : \widehat{x} \in S \right\}$$

è uno scroll (il cui el. neutro è k), ed è un sotto-scroll di M se $\mathbf{0} = k$.
Definiamo la relazione di equivalenza:

$$x \equiv y \quad \text{se} \quad x +^{\mathrm{R}} \mathbf{0} = y +^{\mathrm{R}} \mathbf{0}$$

$$G(M) := M^{\{\mathbf{0}\}} / \equiv .$$

$G(M)$ è un gruppo.
Per ogni $x \in M^{\{\mathbf{0}\}}$ la classe di equivalenza di x è formata da al più 2 elementi. Sia $H(M) := \left\{ x \in M^{\{\mathbf{0}\}} : [x]_{\equiv} \text{ ha 2 elementi} \right\} / \equiv$. $H(M)$ è un sottogruppo di $G(M)$. Se $M = \widehat{G}$, allora $H(M) = G$, e $G(M)$ è il completamento di Cauchy di G.

Nel caso $M = \widehat{G}$ per G gruppo denso, la relazione $\equiv$ è quella che identifica a^+ con a^-.

Regole di calcolo

Sia G un gruppo denso. Data un'espressione aritmetica in $M = \widehat{G}$, ci chiediamo se sia positiva o negativa: per esempio,

$$\Lambda = ((\Lambda_1 +^{\mathrm{R}} \Lambda_2) +^{\mathrm{L}} \Lambda_3) - \Lambda_4 \gtrless \mathbf{0}?$$

Regole di calcolo

Sia G un gruppo denso. Data un'espressione aritmetica in $M = \widehat{G}$, ci chiediamo se sia positiva o negativa: per esempio,

$$\Lambda = ((\Lambda_1 +^{\mathrm{R}} \Lambda_2) +^{\mathrm{L}} \Lambda_3) - \Lambda_4 \gtreqless \mathbf{0}?$$

Siano

$$k := \max\left\{ \widehat{\Lambda_i} \right\},$$
$$\mathbb{K} := \left\{ a \in M : |a| \leq k \right\}$$
$$N := M/\mathbb{K}.$$

N è uno scroll di tipo 0, e dunque $N^{\{\mathbf{0}\}}$ è un gruppo. Siano γ_i le immagini di Λ_i in N, e

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4.$$

Se $\gamma > 0$, allora $\Lambda > k$, se $\gamma < 0$, $\Lambda < 0$, ed abbiamo finito. Se $\gamma = 0$, allora $\Lambda = \pm k$.

Regole di calcolo

Sia G un gruppo denso. Data un'espressione aritmetica in $M = \widehat{G}$, ci chiediamo se sia positiva o negativa: per esempio,

$$\Lambda = ((\Lambda_1 +^{\mathrm{R}} \Lambda_2) +^{\mathrm{L}} \Lambda_3) - \Lambda_4 \gtreqless \mathbf{0}?$$

Siano

$$k := \max\left\{ \widehat{\Lambda}_i \right\},$$
$$\mathbb{K} := \left\{ a \in M : |a| \leq k \right\}$$
$$N := M/\mathbb{K}.$$

N è uno scroll di tipo 0, e dunque $N^{(\mathbf{0})}$ è un gruppo. Siano γ_i le immagini di Λ_i in N, e

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4.$$

Se $\gamma > 0$, allora $\Lambda > k$, se $\gamma < 0$, $\Lambda < 0$, ed abbiamo finito. Se $\gamma = 0$, allora $\Lambda = \pm k$.

1. Le regole di calcolo possono essere date anche in altri casi (oltre che G denso), ma questo è il più interessante.
2. Per concludere, bisogna poter calcolare la “segnatura” di Λ. La definizione è che a^+ ha segnatura $+$, mentre a^- ha segnatura $-$.
3. Il calcolo completo del risultato (cioè se Λ è uguale a k o $-k$) è possibile, ma richiede una spiegazione piú lunga di quanto non permetta il tempo a disposizione.

Esempio

Lemma

Siano $x, x', y \in M$, $j, j', k, m, d \in \mathbb{N}^\star$, *con* $i, j, k < m$ *e* $j + j' = m + d$. *Allora,*

$$(x - jy) + (x' - j'y) + (my - ky) \leq (x + x') - (d + k)y.$$

Immersioni in scroll di tagli

Teorema

Sia M uno scroll di tipo denso. Allora, esiste un gruppo ordinato denso G tale che M si immerge come sotto-scroll di $\widehat{G}$.

Immersioni in scroll di tagli

Teorema

Sia M uno scroll di tipo denso. Allora, esiste un gruppo ordinato denso G tale che M si immerge come sotto-scroll di $\widehat{G}$.

Definizione

Chiamiamo proprio uno scroll M tale che $M^{\{\mathbf{0}\}}$ è denso in M.

Definizione

Sia $\mathcal{W}(M) := \left\{ \widehat{x} : x \in M \right\}$

Immersioni in scroll di tagli

Teorema

Sia M uno scroll di tipo denso. Allora, esiste un gruppo ordinato denso G tale che M si immerge come sotto-scroll di $\widehat{G}$.

Definizione

Chiamiamo proprio uno scroll M tale che $M^{\{\mathbf{0}\}}$ è denso in M.

Definizione

Sia $\mathcal{W}(M) := \left\{ \widehat{x} : x \in M \right\}$

Idea della dimostrazione:

1. Il teorema è vero con l'ipotesi aggiuntiva che M è proprio.
2. Se $\mathcal{W}(M)$ è finito, allora M si immerge in uno scroll proprio (e, di conseguenza, il teorema è valido per M). Perciò, se M è finitamente generato, allora M si immerge in un qualche $\widehat{G}$.

Immersioni in scroll di tagli

Teorema

Sia M uno scroll di tipo denso. Allora, esiste un gruppo ordinato denso G tale che M si immerge come sotto-scroll di $\widehat{G}$.

Definizione

Chiamiamo proprio uno scroll M tale che $M^{(\mathbf{0})}$ è denso in M.

Definizione

Sia $\mathcal{W}(M) := \{\widehat{x} : x \in M\}$

Idea della dimostrazione:

1. Il teorema è vero con l'ipotesi aggiuntiva che M è proprio.
2. Se $\mathcal{W}(M)$ è finito, allora M si immerge in uno scroll proprio (e, di conseguenza, il teorema è valido per M). Perciò, se M è finitamente generato, allora M si immerge in un qualche $\widehat{G}$.

1. Il teorema è valido anche per scroll discreti, ma la dimostrazione è diversa.
2. D'ora in poi supporremo che M è di tipo denso.
3. La dimostrazione continua.

Assiomatizzazione

Teorema

Sia S la teoria degli scroll densi (assiomi di pre-scroll, SA–SC, $-\mathbf{0} < \mathbf{0}$ e $\mathbf{0} +^{\mathrm{R}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$) nel linguaggio $\mathcal{L} := (\mathbf{0}, \leq, +, -)$. Sia D la teoria dei tagli su gruppi ordinati densi, sempre nel linguaggio $\mathcal{L}$.
S è la parte universale di D.

Dimostrazione.

Sia $\psi = \forall x \phi(x)$ una formula universale, tale che $D \vdash \psi$. Se, per contraddizione, M è uno scroll denso tale che $M \models \neg\psi$, sia $a \in M^n$ tale che $M \models \neg\psi(a)$. Sia N sotto-scroll di M generato da a. Dato che N è finitamente generato, N si immerge in $\widehat{G}$ per qualche G gruppo Abeliano denso: assurdo. $\square$

Assiomatizzazione

Teorema

Sia S la teoria degli scroll densi (assiomi di pre-scroll, SA–SC, $-\mathbf{0} < \mathbf{0}$ e $\mathbf{0} +^{\mathrm{R}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$) nel linguaggio $\mathfrak{L} := (\mathbf{0}, \leq, +, -)$. Sia D la teoria dei tagli su gruppi ordinati densi, sempre nel linguaggio $\mathfrak{L}$.
S è la parte universale di D.

Dimostrazione.

Sia $\psi = \forall x \phi(x)$ una formula universale, tale che $D \vdash \psi$. Se, per contraddizione, M è uno scroll denso tale che $M \models \neg\psi$, sia $a \in M^n$ tale che $M \models \neg\psi(a)$. Sia N sotto-scroll di M generato da a. Dato che N è finitamente generato, N si immerge in $\widehat{G}$ per qualche G gruppo Abeliano denso: assurdo. □

Fatto

Gli assiomi SA–SC sono indipendenti.

Conclusione della dimostrazione

Corollario

Ogni scroll denso si immerge in $\widehat{G}$, per un qualche gruppo ordinato denso G.

Conclusione della dimostrazione

Corollario

Ogni scroll denso si immerge in $\widehat{G}$, per un qualche gruppo ordinato denso G.

Dimostrazione.

Ricordiamo che S è la teoria degli scroll (densi), e D quella dei tagli su gruppi Abeliani ordinati densi. Sia M scroll denso, cioè $M \models S$.
Dato che $S = D_\forall$, esiste $N \models D$ tale che $M \subseteq N$.
Tutti i modelli di D sono scroll propri, dunque N è uno scroll proprio, e perciò N si immerge a sua volta in un qualche $\widehat{G}$. □

Lemma

Sia M uno scroll proprio denso. Allora, M si immerge in $\widehat{B}$ per un qualche gruppo ordinato denso B.

Dimostrazione.

Siano
$$G := G(M),$$
$$H := H(M) \subseteq G,$$
$$B := H + \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} G\big(1 + (-\varepsilon)^n\big) \subseteq G[[\varepsilon]].$$

Memo:
$$M^{\{\mathbf{0}\}} = \Big\{a^\pm : a \in H\Big\} \sqcup \Big\{b : b \in G \setminus H\Big\}.$$

Definiamo $\psi^{\{\mathbf{0}\}} : M^{\{\mathbf{0}\}} \to \widehat{B}$

$$a^\pm \mapsto a^\pm, \qquad a \in H;$$

$$b \mapsto \text{ il taglio determinato da } b \text{ su } B, \qquad b \in M^{\{\mathbf{0}\}} \setminus H;$$

$$c \mapsto \sup\Big\{[x_0] + [x_1]\varepsilon + \cdots + [x_n]\varepsilon^n \in B : x_0 < c\Big\}, \qquad c \in M^{\{>0\}}.$$