Esempi ed esercizi su equazioni differenziali

Si risolva

$$\begin{cases} u' = u \cdot t^2 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

determinando in particolare il dominio della sol. massimale.

È un'equazione a variabili separabili:

$$\frac{du}{dt} = u \cdot t^2.$$

Manipoleremo ora i simboli du e dt (che sono puramente formali) come se fossero quantità vere e proprie. Il fatto che i conti che seguono sono corretti è conseguenza di quanto dimostrato dal prof. Benedetti. (Formalismo $u'(t) = a(t) \cdot b(u(t))$, con $x = u(t)$ nelle slides di Benedetti).

$u' = u t^2$

Se $u(t) \equiv k$ è una soluzione costante, $u' \equiv 0$ e sostituendo in $u' = u t^2$ abbiamo $0 = k t^2 \ \forall t$ nel dominio, possibile solo se $k = 0$. Dunque l'unica soluzione costante è $u(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ (dominio $= \mathbb{R}$)

Se $u(t)$ non è costante, allora $u(t) \neq 0 \ \forall t$ nel dominio. Infatti vale il seguente

FATTO: Due soluzioni di un'equazione differenziale del prim'ordine in forma normale che soddisfi C-L che coincidono in un qualsiasi t_0 coincidono ovunque. In particolare, se $u(t) \equiv k$ costante è una soluzione, per tutte le altre soluzioni vale $u(t) \neq k$ $\forall t$ nel dominio (in quanto altrimenti avremmo due soluzioni diverse che coincidono in t_0).

Il FATTO è una conseguenza diretta dell'unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy, che per equazioni del prim'ordine ha come condizione iniziale una condizione del tipo $u(t_0) = \alpha$.

Dunque, poiché l'unica soluzione costante di $u' = ut^2$ è $u(t) \equiv 0$, per ogni altra soluzione $u(t) \neq 0$ $\forall t$.

Noi cerchiamo la soluzione con $u(0) = -1$, dunque posso dividere per u ottenendo

$$\frac{u'}{u} = t^2, \text{ cioè } \quad \frac{du}{dt} \cdot \frac{1}{u} = t^2 \implies \frac{1}{u} du = t^2 dt$$

da cui, integrando, $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int t^2 dt + c \implies$

$$\implies \log|u| = \frac{t^3}{3} + c \implies |u| = e^{\frac{t^3}{3}+c} = e^c \cdot e^{\frac{t^3}{3}}$$

dove c è una costante da determinare con le condizioni iniziali. Poiché $u(0) = -1$, sostituendo

$1 = |u(0)| = e^c \cdot e^{\frac{0^3}{3}} = e^c \implies e^c = 1 \implies c = 0 \implies$

$|u| = e^{\frac{t^3}{3}}$. Poiché $u(0) = -1$ e u non passa mai da 0, $u(t)$ è negativo $\forall t$ nel dominio, per cui

$$u(t) = -e^{\frac{t^3}{3}}, \qquad t \in \mathbb{R} \quad (\text{dominio} = \mathbb{R})$$

Guardando meglio, avremmo potuto subito dire che il dominio sarebbe stato $\mathbb{R}$, in quanto l'equazione è LINEARE.

Al variare di $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(0) = a \end{cases}$$

determinando il dominio della soluzione.

Sol. costanti: $u(t) \equiv k \implies u' \equiv 0 \implies 0 = -\frac{1}{k}$ mai verificata

Dunque non ci sono soluzioni costante

$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u} \implies u\,du = -dt \implies \int u\,du = -\int dt$

$\implies \frac{u^2}{2} = -t + c$. Usiamo la condizione $u(0) = a$ per determinare c. Sostituendo,

$\frac{u(0)^2}{2} = -0 + c \implies \frac{a^2}{2} = c$, da cui

$\frac{u^2}{2} = -t + \frac{a^2}{2} \implies u^2 = -2t + a^2 \implies u = \pm\sqrt{a^2 - 2t}$

?

Per scegliere il segno, guardo ancora la condizione iniziale:
se $a>0$, $u(0)=a \Rightarrow u(0)>0$ e, poiché u non si annulla mai (altrimenti $u'=-\frac{1}{u}$ non ha senso), $u(t)>0$ $\forall t$ nel dominio. Dunque:

$$a>0 \implies u(t)=+\sqrt{a^2-2t}$$

Analogamente,

$$a<0 \implies u(t)=-\sqrt{a^2-2t}$$

Su quale dominio queste funzioni risolvono l'equazione diff.?
$u(t)$ deve essere definita e derivabile, per cui deve valere $a^2-2t>0$, cioè $t<\frac{a^2}{2}$ (in $t=\frac{a^2}{2}$, u è definita ma non derivabile).

Dunque la soluzione massimale di $\begin{cases} u'=-\frac{1}{u} \\ u(0)=a \end{cases}$

è definita in $\left(-\infty, \frac{a^2}{2}\right)$

$$\begin{cases} (u^2+1)u'+u^2=0 \\ u(0)=-1 \end{cases}$$

L'equazione è autonoma e non lineare. È a variabili separabili:

$$(u^2+1)u'=-u^2 \Rightarrow u'=-\frac{u^2}{u^2+1}.$$

$u(t)\equiv -1$ NON risolve l'equazione: l'unica sol.

costante $u(t) \equiv k$ soddisfa $0 = u' = -\dfrac{k^2}{k^2+1} \Rightarrow k=0$

ed è perciò la soluzione costantemente nulla. Dunque se $u(0)=-1$, $u(t) \neq 0$ $\forall t$ nel dominio.

Perciò posso dividere per u^2, ottenendo

$$\frac{u^2+1}{u^2} \cdot u' = -1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{dt} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{u^2}\right)du = -dt \Rightarrow \int\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du = -\int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u - \frac{1}{u} = -t+c \Rightarrow \frac{u^2-1}{u} = -t+c$$

Per trovare c sostituisco $u(0)=-1$, ottenendo

$$\frac{(-1)^2-1}{-1} = -0+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow \frac{u^2-1}{u} = -t$$

$$\Rightarrow u^2-1 = -ut \Rightarrow u^2+ut-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{-t \pm \sqrt{t^2+4}}{2}$$ + o − ?

Per scegliere il segno guardo la condizione iniziale $u(0)=-1$, da cui $-1 = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2+4}}{2} = \dfrac{\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow$ devo scegliere il meno

$$u(t) = \frac{-t-\sqrt{t^2+4}}{2}, \text{ definita in tutto } \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} u' = u^2-1 \\ u(0) = a \end{cases}$$

Se $u(t) \equiv k$ è una soluzione, allora $u' \equiv 0$ e sostituendo otteniamo $0 = k^2 - 1 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$

Dunque questa equazione ha le soluzioni costanti $u(t) \equiv 1$ e $u(t) \equiv -1$.

per $a=1$ per $a=-1$

Possiamo supporre $a \neq \pm 1$ e in tal caso sappiamo che $u(t) \neq \pm 1 \quad \forall t$ (si veda il FATTO sopra).

$u' = u^2 - 1 \Rightarrow$ (posso dividere per u^2-1 perché non si annulla mai in quanto $u(t) \neq \pm 1$) $\dfrac{u'}{u^2-1} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{u^2-1}\frac{du}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{1}{u^2-1}\, du = dt \Rightarrow$$

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2-1}\, du = \int dt}$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+B(u-1)}{u^2-1} = \frac{(A+B)u + (A-B)}{u^2-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{u+1} \quad \text{e}$$

$$\int \frac{1}{u^2-1}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\, du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1}\, du = \frac{1}{2}\log|u-1| - \frac{1}{2}\log|u+1| =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|.$$ Tornando all'eq. differenziale

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = t+c \Rightarrow \log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = 2t + c$$

da determinare dunque scrivo c al posto di $2c$

$$\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = e^{2t+c} = e^{c}\cdot e^{2t} \Rightarrow \frac{u-1}{u+1} = \pm e^{c}\cdot e^{2t}$$

per qualche $c \in \mathbb{R}$, il che è equivalente a

$$\frac{u-1}{u+1} = k\cdot e^{2t} \quad \text{per qualche } k \neq 0.$$

Sostituendo $u(0)=a$ otteniamo

$$\frac{a-1}{a+1} = k\cdot e^{0} \Rightarrow k = \frac{a-1}{a+1} \quad (\text{ricordo } a \neq \pm 1).$$

Dunque $\frac{u-1}{u+1} = k e^{2t} \Rightarrow u-1 = (u+1)k e^{2t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u-1 = uke^{2t} + ke^{2t} \Rightarrow u\left(1-ke^{2t}\right) = 1+ke^{2t}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{1+ke^{2t}}{1-ke^{2t}} = \frac{1+\frac{a-1}{a+1}e^{2t}}{1-\frac{a-1}{a+1}e^{2t}} = \frac{a+1+(a-1)e^{2t}}{a+1-(a-1)e^{2t}}}$$

Questa funzione non è definita nei t che annullano il denominatore, cioè quelli per cui $e^{2t} = \frac{a+1}{a-1}$.

Se $\frac{a+1}{a-1} < 0$, allora non c'è problema.

Ora $\frac{a+1}{a-1} < 0 \iff -1 < a < 1$ (per conti)

Dunque se $-1<a<1$, u è definita in tutto $\mathbb{R}$

Se $a = \pm 1$, u è costante e definita in tutto $\mathbb{R}$.

Se $a>1$ o $a<-1$, $\frac{a+1}{a-1}>0$, per cui $\exists\, t_0$ con $e^{2t_0}=\frac{a+1}{a-1}$,

ed è $t_0=\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1}$.

ATTENZIONE: Il dominio della soluzione massimale NON è $\mathbb{R}\setminus\{t_0\}$. Infatti, il dominio di una soluzione massimale è SEMPRE un intervallo. Nel caso in cui ci sia una condizione iniziale, è un intervallo che contiene il tempo della condizione iniziale.

Nel nostro caso, devo prendere come dominio la componente di $\mathbb{R}\setminus\{t_0\}$ che contiene 0, che è $(t_0+\infty)$ se $t_0<0$ e $(-\infty,t_0)$ se $t_0>0$.

$$t_0=\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1}>0 \iff \frac{a+1}{a-1}>1 \iff \frac{a+1}{a-1}-1>0$$

$$\iff \frac{a+1-(a-1)}{a-1}>0 \iff \frac{2}{a-1}>0 \iff a>1$$

(mentre $t_0<0$ se $a<-1$).

Ricapitolando, la soluzione è

"torna" anche se $a=\pm 1$

$$u(t)=\frac{a+1+(a-1)e^{2t}}{a+1-(a-1)e^{2t}}$$ con dominio:

- se $a>1$: $D=\left(-\infty,\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1}\right)\ni 0$
- se $-1\le a\le 1$: $D=\mathbb{R}\ni 0$
- se $a<-1$: $D=\left(\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1},+\infty\right)\ni 0$

tempo della condizione iniziale.

Equazioni lineari

Si trovi l'integrale totale di

① $u' + 6u = t^2 + 1$

② $u' + 5u = \cos(2t)$

③ $u'' - u' - 2u = e^t + e^{2t}$

① Soluzioni dell'omogenea associata $u' + 6u = 0$

Ha polinomio caratteristico $X + 6$ con radice -6

$\Rightarrow$ $u(t) = K e^{-6t}$, $K \in \mathbb{R}$, sono tutte e sole le soluzioni dell'omogenea.

Cerco sol. particolare. Come già spiegato, poiché 0 NON è radice del polinomio caratteristico, provo con un polinomio di grado 2 : $u(t) = at^2 + bt + c$. Ottengo $u' = 2at + b$ $\Rightarrow$

$$u' + 6u = 2at + b + 6(at^2 + bt + c) = 6a t^2 + (2a + 6b)t + b + 6c$$

che uguaglio a $t^2 + 1$ ottenendo

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 2a + 6b = 0 \\ b + 6c = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

L'integrale totale è $\left\{ \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Ke^{-6t},\ K \in \mathbb{R} \right\}$

② $u' + 5u = \cos(2t)$

Omogenea associata: $u' + 5u = 0$, una cui base delle soluzioni è $u(t) = e^{-5t}$. Per cercare una soluzione particolare, posso lavorare con parti reale e/o immaginarie di e^{2it}. Oppure (è la stessa cosa) provare con

$$u(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t) \Rightarrow$$

$$u'(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t) \Rightarrow$$

$$u' + 5u = -2a\sin 2t + 2b\cos 2t + 5(a\cos 2t + b\sin 2t) =$$

$$= (-2a + 5b)\sin 2t + (2b + 5a)\cos 2t$$

Devo uguagliare questa quantità con $\cos(2t)$, per cui

$$\begin{cases} -2a + 5b = 0 \\ 5a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{29} \\ a = \frac{5}{29} \end{cases} \Rightarrow u(t) = \frac{5}{29}\cos 2t + \frac{2}{29}\sin 2t$$

è una sol. particolare

L'integrale totale è $u(t) = \frac{5}{29}\cos 2t + \frac{2}{29}\sin 2t + k e^{-5t}$, $k \in \mathbb{R}$

③ $u'' - u' - 2u = e^t + e^{2t}$

Omogenea associata: $u'' - u' - 2u = 0$ con polinomio caratteristico $x^2 - x - 2 = 0$ che ha radici $x = -1$, $x = 2$. Dunque le soluzioni dell'omogenea sono $u(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{2t}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

Per trovare una soluzione particolare, poiché l'equazione è lineare, se trovo una soluzione di

$u'' - u' - 2u = e^t$ e una soluzione di

$u'' - u' - 2u = e^{2t}$ e le sommo, ottengo una soluzione

dell'equazione data.

Per la prima delle due, poiché e^t NON è soluzione dell'omogenea, posso provare con $u(t) = Ke^t$:

$$u'' - u' - 2u = ke^t - ke^t - 2ke^t = -2ke^t \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Per la seconda, se provassi $u(t) = ke^{2t}$ non ce la farei, perché 2 è radice del polinomio caratteristico (con molteplicità 1). Devo provare con $u(t) = k \cdot t \cdot e^{2t}$

Ottengo $\quad u' = k\left(e^{2t} + 2te^{2t}\right)$

$$u'' = k\left(2e^{2t} + 2e^{2t} + 4te^{2t}\right) = k\left(4e^{2t} + 4te^{2t}\right)$$

$$u'' - u' - 2u = K\left[4e^{2t} + \cancel{4te^{2t}} - e^{2t} - \cancel{2te^{2t}} - \cancel{2te^{2t}}\right] =$$

$$= k \cdot 3 \cdot e^{2t}$$, che, posto uguale a e^{2t}, dà $k = \frac{1}{3}$

Dunque una soluzione particolare è

$$u(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}te^{2t}$$