27/5/2020

Titolo nota 27/05/2020

Questioni riguardanti esistenza / unicità di soluzioni di eq. differenziali.

$$\begin{cases} u' = \sqrt[3]{u} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

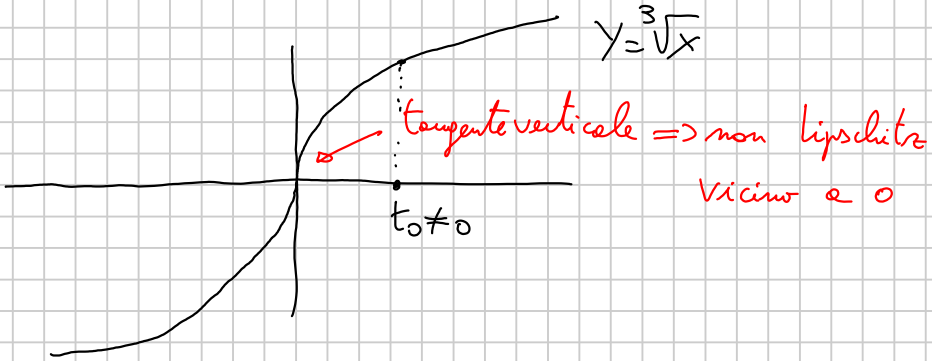
È un problema di Cauchy del I ordine, che però NON soddisfa la condizione C-L che garantisce esistenza e unicità. Infatti l'eq. differenziale è

$u' = F(u,t)$ con $F(u,t) = \sqrt[3]{u}$

(in particolare, t non compare $\Rightarrow$ l'equazione è autonoma)

Ora $(u,t) \mapsto \sqrt[3]{u}$ è continua ($\sqrt[3]{\ }$ lo è),

ma non lipschitz vicino a 0:



($\forall x_0 \neq 0$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ è lipschitz in un intorno di x_0,

perché è derivabile con derivata continua in un intorno di x_0)

Il problema $\begin{cases} u' = \sqrt[3]{u} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$, $\alpha \neq 0$ soddisfa C-L in un intorno di $(0, \alpha)$. Ma se $\alpha = 0$ C-L

tempo iniziale, valore iniziale

non è soddisfatto.

Avendo comunque continuità, una soluzione esiste, ma potrebbero esisterne molti.

$$u' = \sqrt[3]{u} \implies u(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow u' \equiv u \equiv 0$$

Perciò $u(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ è soluzione di $\begin{cases} u' = \sqrt[3]{u} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

Cerchiamo una soluzione della forma $u(t) = k t^{\alpha}$ e vediamo se ne troviamo altre.

$$u' = \alpha k t^{\alpha - 1} \qquad \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{k} \cdot t^{\frac{\alpha}{3}}$$

Imponendo $u' = \sqrt[3]{u}$ ho $\begin{cases} \alpha k = \sqrt[3]{k} \\ \alpha - 1 = \frac{\alpha}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} k = k^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

$$\begin{cases} k^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \\ \alpha = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 \\ \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dunque $u(t) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 \cdot t^{\frac{3}{2}}$ è soluzione di $\begin{cases} u' = \sqrt[3]{u} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

Infatti, è derivabile $\forall t \in \mathbb{R}$ e, ricontrollando,

$$u'(t) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{u} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{t^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \, t^{\frac{1}{2}}$$

Problema: la mia $u(t)$ NON è definita per $t<0$

$$t^{\frac{3}{2}} = ? \text{ se } t<0.$$

Sia $u(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 t^{\frac{3}{2}} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t<0 \end{cases}$

Allora: $u(t)$ è continua (è ovviamente continua per $t \neq 0$,

e $\lim_{t \to 0^+} u(t) = \lim_{t \to 0^+} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 t^{\frac{3}{2}} = 0 = \lim_{t \to 0^-} u(t)$

per cui $\lim_{t \to 0} u(t) = 0 = u(0)$ per cui f è continua

anche in 0. Inoltre, per vedere se è derivabile in 0,

usiamo un teorema che, visto che f è continua in 0,

ci assicura che se $\lim_{t \to 0} u'(t) = \ell$, allora $u'(0) = \ell$.

Allora $u'(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 t^{\frac{1}{2}} & \text{se } t>0 \\ 0 & \text{se } t<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{t \to 0} u'(t) = 0 \Rightarrow u$ è derivabile in 0 con $u'(0)=0$.

Dunque $u(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 t^{\frac{3}{2}} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t<0 \end{cases}$ è derivabile ovunque

e $\forall t$ verifica $u'(t) = \sqrt[3]{u(t)}$ (per $t<0$ è ovvio,

per $t>0$ è il calcolo visto sopra, e per $t=0$ è una

verifica diretta. Dunque abbiamo trovato 2 soluzioni

distinte del problema $\begin{cases} u' = \sqrt[3]{u} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

$$u_2(t)=\begin{cases}0 & \text{se } t<0\\ \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^3 t^{\frac{3}{2}} & \text{se } t\geq 0\end{cases}$$

$$u_1(t)=0 \quad \forall t$$

NOTA: Questo fenomeno è abbastanza raro: di norma le "nostre" equazioni verificano C-L.

Un altro esempio

$$\begin{cases} t u' - u = c(t) \\ u(0) = a \end{cases} \qquad , \; a \in \mathbb{R}$$

Questo NON è un problema di Cauchy perché l'equazione non è normalizzata, cioè non è della forma normale $u' = F(t,u)$.

Se avessi $\begin{cases} t u' - u = c(t) \\ u(1) = a \end{cases}$, vicino a $t_0 = 1$

posso dividere per t e il problema, almeno per $t \neq 0$, diventerebbe equivalente a

$$\begin{cases} u' - \dfrac{u}{t} = \dfrac{c(t)}{t} \\ u(1) = a \end{cases} ,$$

che è un problema di Cauchy con esistenza e unicità (supponiamo $c(t)$ liscia, C^∞).

$$\boxed{t u' - u = c(t) \iff u' - \frac{u}{t} = \frac{c(t)}{t} \quad \text{se } t \neq 0}$$

Torniamo a $\begin{cases} tu' - u = c(t) \\ u(0) = a \end{cases}$

Se $u: I \to \mathbb{R}$ è soluzione (I intervallo aperto che contiene 0), allora posto $t=0$ otteniamo

$0 \cdot u'(0) - u(0) = c(0) \implies u(0) = -c(0)$.

Dunque se $a \neq -c(0)$ non ci sono soluzioni (violata l'esistenza)

Esempio: $\begin{cases} tu' - u = e^{-t} \\ u(0) = 5 \end{cases}$ non ha soluzione

Infatti, per $t=0$ ho $0 \cdot u'(0) - u(0) = e^{-0}$

cioè $0 - 5 = 1$ assurdo

Ma cosa accade se $u(0) = -1$? Sostituendo non trovo contraddizioni, e l'equazione potrebbe avere soluzione (ma potrebbe anche non averne, e il numero di soluzioni non è noto a priori: NON ricadiamo nelle ipotesi del Teorema di Cauchy).

Se $u: I \to \mathbb{R}$ è soluzione, u deve essere definita in tutto I, dunque anche in punti con $t>0$ e $t<0$.

In $I \setminus \{0\}$ deve valere

$$u' - \frac{u}{t} = \frac{c(t)}{t}$$

È un'equazione della forma $u' + a(t)u(t) = b(t)$

con $a(t) = -\frac{1}{t}$ $\quad b(t) = \frac{c(t)}{t}$, che ha soluzione,

posto $A(t) = -\log|t|$, primitiva di $a(t)$,

$$u(t) = K e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t)\, dt =$$

$$= K e^{\log|t|} + e^{\log|t|} \int e^{-\log|t|} \frac{c(t)}{t}\, dt =$$

$$= K \cdot |t| + |t| \cdot \int \frac{1}{|t|} \frac{c(t)}{t}\, dt$$

Distinguendo i casi $t>0$ e $t<0$ (e sostituendo K con $-K$ se $t<0$), abbiamo

$$u(t) = K \cdot t + t \int \frac{c(t)}{t^2}\, dt$$

Questa formula definisce una funzione $u : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

che verifica $u' - \frac{u}{t} = \frac{c(t)}{t}$ e dunque anche

$$t u' - u = c(t) \qquad \forall t \neq 0$$

Domanda: Questa u si prolunga a una funzione derivabile in 0 che perciò risolve il problema iniziale?

Risposta: Dipende da $c(t)$.

Esempio: $\begin{cases} tu' - u = t^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$ ← unica scelta che dà esistenza

Ottengo $u: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad u(t) = kt + t \cdot \int \frac{t^2}{t^2} \, dt =$

$= kt + t \cdot t = t^2 + kt$

$\forall k \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^2 + kt$ è soluzione con $u(0) = 0$.

Dunque il problema ammette <u>infinite soluzioni</u>.

Verifichiamolo: $u(t) = t^2 + kt \implies u'(t) = 2t + k$

$tu' - u = t(2t+k) - (t^2 + kt) = 2t^2 + tk - t^2 - tk = t^2$

$\square$

Venerdì: Esempio simile con 0 soluzioni.