Teoria dei nodi. Primo foglio di esercizi.

Roberto Frigerio

14 ottobre 2011

1. Sia D_n il gruppo diedrale di ordine $2n$, ovvero il gruppo di ordine $2n$ presentato da

$$D_n = \langle r, s \,|\, r^n = s^2 = 1, srsr = 1 \rangle \ ,$$

e sia $R_n \subseteq D_n$ il sottogruppo delle rotazioni, ovvero il sottogruppo ciclico di ordine n generato da r.

   (a) Posto $g_i = r^i s$, si mostri che $g_i g_j g_i^{-1} = g_{2i-j}$.

   (b) Sia K un nodo. Si dimostri che le n-colorazioni di K sono in bigezione con l'insieme degli omomorfismi da $\pi_1(C(K))$ in D_n la cui immagine non sia contenuta in R_n.

   (c) Il punto (b) rimane vero se si considera un link al posto di un nodo?

2. Per ogni $n \geq 2$ sia K_n il nodo rappresentato in Figura 1, dove si suppone che nella striscia verticale centrale vi siano n incroci. Si mostri che K_n non è equivalente a K_m se $m \neq n$.

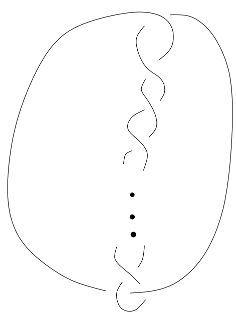

Figura 1: Figura per l'Esercizio 2

3. Si consideri il nodo K descritto in Figura 2.

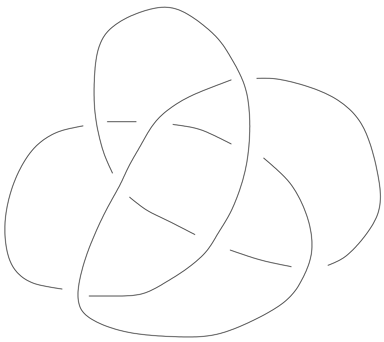

Figura 2: Figura per l'Esercizio 3

   (a) Si mostri che K non è banale.

   (b) Si mostri che
$$K = K^* = -K = -K^* \ .$$

4. Siano K_1, K_2 le componenti del link mostrato in Figura 3. Si dica se K_2 è omotopicamente banale in $C(K_1)$. Se ne deduca che, se $L = K_1 \cup K_2$ è un link, allora la relazione "K_i è omotopicamente banale in $C(K_j)$" non è simmetrica in i, j. (Suggerimento: si dia una presentazione di $\pi_1(C(K_1))$, e si mostri che K_2 ne definisce un elemento non banale).

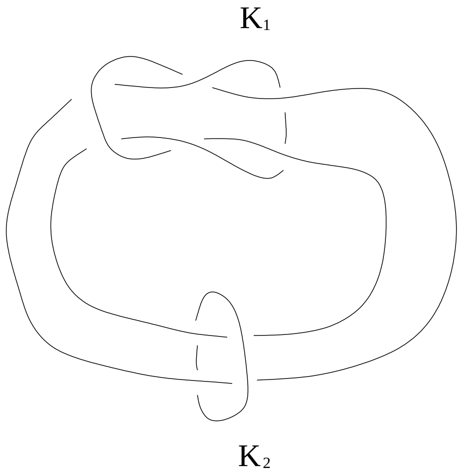

Figura 3: Figura per l'Esercizio 4