Geometria Riemanniana. Primo foglio di esercizi.

Roberto Frigerio

18 marzo 2013

1. Sia $f\colon M \to N$ un'isometria locale tra varietà Riemanniane e sia p un punto di M Si mostri che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(B(p,\varepsilon)) = B(f(p),\varepsilon)$, e, se d_M e d_N denotano le distanze Riemanniane di M e N, allora $d_N(f(q_1), f(q_2)) = d_M(q_1, q_2)$ per ogni coppia di punti q_1, q_2 in $B(p,\varepsilon)$.

2. Sia $\gamma\colon I \to M$ una curva a valori in una varietà Riemanniana, su cui supponiamo fissata la connessione di Levi-Civita. Sia $\psi\colon \widetilde{I} \to I$ un diffeomorfismo tra intervalli, e sia $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$. Siano infine $D, \widetilde{D}$ gli operatori di derivata covariante lungo γ e $\widetilde{\gamma}$. Si mostri che, se $V \in \gamma$ è un campo lungo γ, allora per il corrispondente campo $\widetilde{V} = V \circ \psi$ lungo $\widetilde{\sigma}$ si ha
$$\widetilde{D}_t \widetilde{V} = \psi'(t) \cdot D_{\psi(t)} V \ .$$
(Suggerimento: È sufficiente osservare che ogni campo lungo $\widetilde{\gamma}$ corrisponde a un campo lungo γ, e che, definendo $\widetilde{D}$ come sopra, si ha che $\widetilde{D}$ soddisfa tutti gli assiomi della derivata covariante).

   Se ne deduca che, se γ è una curva regolare (ovvero tale che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$), allora esiste una riparametrizzazione di γ che sia una geodetica se e solo se $D_t\gamma'$ è un multiplo di $\gamma'(t)$ per ogni $t \in I$.

3. Siano Ω_1, Ω_2 aperti di $\mathbb{C}$, e sia $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ un biolomorfismo. Sia g_E l'usuale metrica Euclidea indotta su Ω_i dalla metrica Riemanniana standard di $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, sia $h\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^+$ una funzione liscia positiva, e sia g_2 la metrica Riemanniana su Ω_2 definita da
$$g_2 = h \cdot g_E \ .$$
Si mostri che, se $g_1 = f^*(g_2)$ è la metrica Riemanniana su Ω_1 per cui f sia un'isometria, allora
$$g_1(p) = |f'(p)|^2 \cdot h(f(p)) \cdot g_E(p)$$
per ogni $p \in \Omega_1$. Siano ora $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$, si ponga su D la metrica iperbolica
$$g_D = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \cdot g_E$$
e sia $f\colon H \to D$ il biolomorfismo
$$f(z) = \frac{z-i}{z+i} \ .$$

Si mostri che, se poniamo su H le coordinate (x, y) tali che $z = x + iy$, allora $f^*(g_D)$ è data da

$$g_H = \frac{1}{y^2} \cdot g_E \ .$$

(Suggerimento: si ricordi che $|z^2| = z\overline{z}$, $\Re(z) = (z + \overline{z})/2$ e $\Im(z) = -i(z - \overline{z})/2$ per ogni $z \in \mathbb{C}$).

4. Si consideri il modello del semipiano del piano iperbolico $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ dotato della metrica $g_H = g_E/y^2$. Si ricordi che ogni campo vettoriale $V \in \mathcal{T}(H)$ può essere identificato con una funzione

$$V = (V^1, V^2) \colon H \to \mathbb{R}^2 \ .$$

Pertanto, dati due campi vettoriali V, W su H ha senso considerare il campo vettoriale

$$k(V, W) = (-V^1 W^2 - V^2 W^1, V^1 W^1 - V^2 W^2) \ .$$

Si mostri che

$$k(V, W) = k(W, V), \quad g_E(k(V, W), Z) + g_E(W, k(V, Z)) = -2V^2 g_E(W, Z) \ . \qquad (1)$$

Siano ∇^E e ∇^H le connessioni di Levi-Civita su H associate rispettivamente alla metrica Euclidea e a quella iperbolica. Si mostri che

$$\nabla^H_V W = \nabla_V W + y^{-1} k(V, W) \ .$$

(Suggerimento: si mostri che questa formula definisce una connessione simmetrica compatibile con g_H, sfruttando il fatto che ∇ è la connessione di Levi-Civita di g_E. A tale scopo saranno utili le formule (1)). Da questo fatto discende facilmente che, se $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) \colon I \to H$ è una curva e D indica la derivata covariante (indotta da ∇^H) sui campi lungo γ, allora

$$D_t V = V'(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \cdot k(\gamma'(t), V(t))$$

per ogni $V \in \mathcal{T}(\gamma)$, $t \in I$. In particolare,

$$D_t \gamma' = \gamma''(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \cdot k(\gamma'(t), \gamma'(t)) \ .$$

Siano ora $\gamma \colon \mathbb{R}^+ \to H$ e $\sigma \colon (0, \pi) \to H$ le curve regolari definite da

$$\gamma(t) = (x_0, t), \qquad \sigma(t) = (x_0 + R\cos t, R\sin t)$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $R > 0$. Si mostri che sia γ sia σ sono geodetiche, a meno di riparametrizzazioni. (Suggerimento: si sfrutti l'Esercizio 2).