Geometria Riemanniana. Terzo foglio di esercizi.

Roberto Frigerio

2 maggio 2013

Negli esercizi si farà uso della nozione di metrica Riemanniana prodotto, che ricordo qui sotto. Come al solito, tutte le varietà (e sottovarietà) si intendono connesse.

Siano (M, g), (N, g') varietà Riemanniane e sia $V = M \times N$. Per ogni $(p, q) \in V$ vi è un'idenfiticazione naturale tra $T_{(p,q)}V$ e $T_pM \oplus T_qN$ (ottenuta, per esempio, identificando T_pM con il sottospazio $di_p(T_pM) \subseteq T_{(p,q)}V$, dove $i \colon M \to V$ è data da $i(p') = (p', q)$). La metrica Riemanniana prodotto $g \times g'$ su V si ottiene ponendo $(g \times g')_{(p,q)}(v + v', w + w') = g_p(v, v') + g_q(w, w')$ per ogni $v, w \in T_pM$, $v', w' \in T_qN$.

1. Sia $V = M \times N$ una varietà Riemanniana prodotto, e siano R^M, R^N i tensori di Riemann rispettivamente di M e N. Sia R il tensore di Riemann di V. Si mostri che, per ogni $v_1, v_2, v_3 \in T_pM$, $w_1, w_2, w_3 \in T_qN$, nel punto $(p, q) \in M \times N$ si ha
$$R(v_1 + w_1, v_2 + w_2)(v_3 + w_3) = R^M(v_1, v_2)v_3 \ + \ R^N(w_1, w_2)w_3 \ .$$

2. Sia M una sottovarietà di una varietà Riemanniana V, e sia $S \colon TM \times TM \to N(M)$ l'operatore forma, dove $N(M)$ è il fibrato normale di M in V. Allora M si dice *totalmente geodetica* in $p \in M$ se $S_p \colon T_pM \times T_pM \to N_p(M)$ è nullo, e M si dice *totalmente geodetica* se lo è in ogni suo punto.
   (a) Sia $\gamma \colon I \to M$ una curva, sia $w \in T_{\gamma(0)}M$ e sia $w(t)$ il campo lungo σ ottenuto per trasporto parallelo di w nella varietà ambiente V. Si mostri che, se M è totalmente geodetica, allora $w(t) \in T_{\gamma(t)}M$ oer ogni t.
   (b) Si mostri che M è totalmente geodetica se e solo se una qualsiasi geodetica di M è anche una geodetica di V.
   (c) Sia M totalmente geodetica in V. Si mostri che, localmente, la distanza intrinseca di M coincide con la restrizione a M della distanza intrinseca di V. L'asserto è vero anche globalmente?
   (d) Si caratterizzino le sottovarietà totalmente geodetiche di S^n e di $\mathbb{H}^n$.

3. Per la soluzione di quasto esercizio è necessario sfruttare alcuni punti dell'esercizio precedente.

   Si consideri la varietà prodotto $V = S^2 \times \mathbb{R}$, dove S^2 e $\mathbb{R}$ sono dotati dell'usuale metrica a curvatura constante. Sia v_1, v_2 una base ortonormale di T_pS^2 e per ogni

$t_0 \in \mathbb{R}$ sia $\partial_t \in T_{t_0}\mathbb{R}$ l'usuale vettore tangente unitario. Siano infine $q = (p, t_0)$ e $H = \mathrm{Span}\langle v_1, v_2 + \partial_t\rangle \subseteq T_q V$. Vogliamo mostrare che H non è tangente ad alcune superficie totalmente geodetica passante per q. Per assurdo, sia M una tale superficie.

(a) Sia $q_1 = (p_1, t_1) \in V$. Se Z è un piano di $T_q V$, definiamo l'angolo $\alpha(Z)$ come l'angolo formato da Z e $T_{p_1}S^2 \subseteq T_{q_1}Z$. Si calcoli la curvatura sezionale di Z in funzione di $\alpha(Z)$.

(b) Sia γ una geodetica di M uscente da q. Si mostri che $T_{\gamma(t)}M$ è uguale al trasporto parallelo di H lungo γ, e se ne deduca che (almeno in un intorno di q) la superficie M ha curvatura costante.

(c) Si scelgano due geodetiche γ_1, γ_2 uscenti da q. Sfruttando il punto precedente (e il fatto che conosciamo la formula esplicita della distanza in spazi di curvatura constante) si calcoli la distanza $d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ in M tra $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ per t piccolo.

(d) Si confronti $d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ con $d_V(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, e si deduca che M non è totalmente geodetica.

4. Si ponga su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ la metrica Riemanniana g definita da

$$g_q(v, w) = \frac{\Re\langle v, w\rangle}{\langle q, q\rangle} ,$$

dove $\langle \cdot, \cdot\rangle$ è il prodotto hermitiano standard. Sia inoltre $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'usuale proiezione.

(a) Per ogni $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sia $F_p = \pi^{-1}(p)$ (dunque F_p è una sottovarietà bidimensionale di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$). Per ogni $v \in T_p\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $q \in F_p$, si mostri che esiste un unico $v(q) \in T_q(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ tale che $d\pi_q(v(q)) = v$ e $v(q)$ sia ortogonale a $T_q F_p$.

(b) Dati $v, w \in T_p\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, si mostri che la quantità $g_q(v(q), w(q))$ non dipende dalla scelta di $q \in F_p$, e la si denoti con $\hat{g}_p(v, w)$.

(c) Si mostri che la curvatura sezionale di $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \hat{g})$ varia tra 1 e 4.

(d) Si mostri che, dati $v \in T_p\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $w \in T_q\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ entrambi di norma unitaria, esiste un'isometria f di $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \hat{g})$ tale che $f(p) = q$ e $df_p(v) = w$, ma che $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \hat{g})$ non è omogeneo e isotropo (secondo la definizione data a lezione).