Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 13 del 13/03/2020

1. Si mostri che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \ .$$

2. Imitando quanto fatto a lezione per l'arcoseno, si determini la derivata della funzione $f\colon (-1,1) \to (0,\pi)$, $f(x) = \arccos x$. Quanto valgono $\lim_{x\to -1^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f'(x)$?

3. Abbiamo visto a lezione che, se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora la funzione $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ ha derivata $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ per ogni $x \neq 0$.

- Si scrivano le derivate delle funzioni $f, g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $g(x) = 1/\sqrt[4]{x}$.

Quando n è un intero non negativo, la formula $f(x) = x^n$ descrive una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

- Usando la regola di Leibniz, si mostri per induzione che, se $n \in \mathbb{N}_+$ e $f(x) = x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f'(x) = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Sia ora $n \in \mathbb{N}_+$ e si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ data da $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$. Usando la formula per la derivata del reciproco di una funzione, si mostri che anche in questo caso $f'(x) = -nx^{-n-1}$ per ogni $x \neq 0$.

4. Si calcoli la derivata della funzione $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ e, ricordando che $(\sinh)'(x) = \cosh x = \sqrt{1 + (\sinh x)^2}$, si controlli che il risultato è coerente con la regola di derivazione per la funzione inversa.

5. Modificando opportunamente la strategia seguita per l'esercizio precedente, si scriva una formula esplicita per la funzione $\operatorname{arccosh}\colon (1,+\infty) \to (0,+\infty)$, funzione inversa della funzione $\cosh\colon (0,+\infty) \to (1,+\infty)$.

Si calcoli la derivata della funzione arccosh, e si controlli che il risultato trovato al punto precedente è coerente con la regola di derivazione per la funzione inversa.

6. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si mostri che:

(1) Se f è pari, f' è dispari.
(2) Se f è dispari, f' è pari.

7. Usando le regola di de l'Hôpital, si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\log(\cos x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(2x)}{1-\cos x}\,, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\,, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\log(\tan x)}{\sin x-\cos x}\,.$$

8. Sia f la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{altrimenti}\end{cases}\,.$$

(1) Si dica se f sia continua in 0.
(2) Si dica se f sia derivabile in 0.

(Si usino le definizioni!!!).

9. Si considerino le funzioni da $\mathbb{R}$ in sé

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x^2\sin(1/x) & \text{altrimenti}\end{cases}\,, \qquad g(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x+x^2\cos(1/x) & \text{altrimenti}\end{cases}\,.$$

(1) Dimostrare che f e g sono continue e derivabili su tutto $\mathbb{R}$.
(2) Dimostrare che f' e g' sono continue su $\mathbb{R}\setminus 0$ ma non su tutto $\mathbb{R}$.

10. Siano $f(x)=\sin^2 x$ e $g(x)=\sqrt{x^2+1}$. Si calcolino

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Questi limiti coincidono? Ciò viola la regola di de l'Hôpital?

11. Per ciascuna delle seguenti funzioni $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si determinino i punti nei quali f è derivabili, e si calcoli la derivata nei punti in cui essa esiste:

$$f(x)=\sin(x^2e^2)\,, \quad f(x)=\frac{\log(1+|x|)}{2+\sin x}\,, \quad f(x)=(1+x^2)^{\sin x}\,.$$

12. Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin x$.

(1) Si mostri che f ammette un numero infinito di punti stazionari (suggerimento: NON si chiede di calcolarli! Si verifichi che f è derivabile con derivata continua, e si applichi opportunamente il teorema di esistenza degli zeri alla derivata).
(2) La funzione f ammette massimo e/o minimo assoluto?

13. Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x^2$.

(1) Si determinino i punti di massimo e minimo relativi di f, mostrando in particolare che sono infiniti.
(2) La funzione f ammette massimo e/o minimo assoluto?