Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esericizi n.ro 15 del 27/03/2020

1. Sia $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare o confutare con un esempio le seguenti affermazioni.

(1) Se f ha un punto di massimo relativo, allora f non è iniettiva.
(2) Se f ha un punto di massimo relativo *interno*, allora f non è iniettiva.
(3) Se f è strettamente monotona allora non ammette né massimo né minimo assoluti.
(4) Se f è strettamente monotona allora non ammette né massimi relativi né minimi relativi.
(5) Se f è strettamente monotona allora non ammette né massimi relativi *interni* né minimi relativi *interni.*

2. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile.

(1) È vero che, se f ammette l'asintoto obliquo destro $y = mx + q$, allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m$?
(2) È vero che, se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m$, $m \neq 0$, allora f ammette un asintoto obliquo destro della forma $y = mx + q$?

3. Si consideri la funzione $g\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x\log^2 x$ e si mostri che esiste $x_0 > 1$ tale che $g(x) < 1$ per $x < x_0$ e $g(x) > 1$ per $x > x_0$.

4. Si consideri la funzione $h\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = \frac{\log x}{1 + x\log x}.$$

Si determinino i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di h.

5. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\arctan(3x) = x + 2\lambda$.

6. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2\log(1 + |x|) - \log(1 + x^2)$.

(1) Si mostri che f è continua su tutto $\mathbb{R}$, e si determinino i punti in cui è derivabile.
(2) Si determinino eventuali asintoti di f.
(3) Si determinino gli intervalli di monotonia di f, e se ne calcolino massimi e minimi relativi ed assoluti.
(4) Si mostri che f ha esattamente due flessi (a questo scopo, può essere utile studiare separatamente il segno della funzione $x \mapsto x^3 - x^2 - x - 1$).

7. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $x \mapsto |x| \cdot e^{-|x|}$.

(1) Dire se f sia continua in 0, e se sia derivabile in 0.
(2) Determinare gli intervalli di monotonia, i massimi ed i minimi assoluti e relativi della funzione f.
(3) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, calcolare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$.

8. Siano $q = \frac{1956}{720}$ ed e il numero di Nepero. Stabilire se $\mathrm{e} < q$, $\mathrm{e} = q$ oppure $\mathrm{e} > q$.

9. Approssimare $\cos \frac{1}{5}$ con un numero razionale, commettendo un errore inferiore a 10^{-5}.

10. Mimando la dimostrazione fatta in aula per la funzione esponenziale, si mostri che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \ .$$

11. Sfruttando il Teorema di Taylor con resto di Lagrange, si mostri che, per ogni $x > 0$, si ha

$$\log(1+x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right) + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} \ ,$$

per qualche c con $0 < c < x$. Posto $x = 1$, si deduca che

$$\left| \log(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \ ,$$

e si concluda che

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

(questa somma infinita indica informalmente la quantità $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}/k$).

12. Siano $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni convesse.

(1) È vero che la composizione $f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa?
(2) Si supponga ora che f sia anche crescente. È vero che la composizione $f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa?

13. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - |x|$.

(1) Si mostri che f è continua su tutto $\mathbb{R}$, ed è derivabile infinite volte su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(2) Si mostri che $f''(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.
(3) Si dica se f sia convessa.

14. È vero che la somma di funzioni convesse è convessa? È vero che il prodotto di funzioni convesse è una funzione convessa?

15. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa derivabile tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

(1) Si mostri che esiste $x \in [0, 1]$ con $f'(x) = 1$.
(2) Si mostri che $f'(x) \geq 1$ per ogni $x \geq 1$.
(3) Si mostri che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (suggerimento: si usi il Teorema di Lagrange).