Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esericizi n.ro 17 del 10/04/20

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(1) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si determinino i valori $x \in \mathbb{R}$ per cui
$$|f(x) - f(n)| \leq 1 \ .$$
(2) Sfruttando il punto precedente, si mostri che f non è uniformemente continua.

2. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Si mostri che f è uniformemente continua.

3. Sia $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \sqrt{x}$. Si mostri che f non è Lipschitziana, ma che f è uniformemente continua (per la seconda affermazione, si ricordi un teorema visto a lezione!).

4. Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili. Si mostri che, se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

5. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Sfruttando l'esercizio precedente, ed il fatto che $\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, si mostri che
$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \ .$$
(Il fatto che $|f(x)|$ sia una funzione integrabile andrebbe dimostrato, ma lo possiamo assumere. La dimostrazione non è complicata, ma un po' noiosa.)

6. Si consideri la funzione così definita: $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$.

(1) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\psi_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $\psi_n(x) = 1$ se $x \in [-1/n, 1/n)$, e $\psi_n(x) = 0$ altrimenti. Si osservi che ψ_n è una funzione elementare, e che $\psi_n(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [-1,1]$.
(2) Sfruttando il punto precedente, si mostri che $I^+(f, [-1,1]) \leq 0$.
(3) Si mostri che $I^-(f, [-1,1]) \geq 0$.
(4) Si mostri che f è integrabile, e $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$.

7. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Per ogni $n \geq 1$ si considerino le funzioni semplici $\varphi_n^-, \varphi_n^+\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ così definite: per ogni $k = 0, \dots, n-1$,
$$\varphi_n^-(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \ \text{se } x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \ , \quad \varphi_n^+(x) = \left(\frac{k+1}{n}\right)^2 \ \text{se } x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \ .$$
(1) Si mostri che $\varphi_n^-(x) \leq f(x) \leq \varphi_n^+(x)$ per ogni $x \in [0,1]$.

(2) Utilizzando l'uguaglianza $\sum_{k=1}^{j} k^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$, si calcolino $\int_0^1 \varphi_n^-(x)\,dx$ e $\int_0^1 \varphi_n^+(x)\,dx$.
(3) Si mostri che $I^-(f,[0,1]) \geq 1/3$ e $I^+(f,[0,1]) \leq 1/3$.
(4) Se ne deduca (senza usare il Teorema fondamentale del calcolo!) che

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\ .$$

I prossimi esercizi vanno svolti DOPO la lezione di venerdì 17 aprile.

8. Si calcolino

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(2x) + \cos(x))\,dx\ , \qquad \int_0^4 3\sqrt{x}\,dx\ , \qquad \int_0^1 (2e^{2x} - 3e^x)\,dx\ .$$

9. Si calcolino, se esistono,

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a e^{-x}\,dx\ , \qquad \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx\ .$$

Qual è l'interpretazione geometrica dei risultati?

10. Si calcolino

$$\int_{-2}^3 |x|\,dx\ , \qquad \int_0^2 |1-x|\,dx\ , \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos|x|\,dx\ .$$

11. Sia $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$. Determinare una primitiva $P(x)$ di $p(x)$ tale che $P(0) = 1$.

12. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una primitiva di f.
(1) È vero che, se f è dispari, allora F è pari?
(2) È vero che, se f è pari, allora F è dispari?
(3) Si mostri che, se f è pari, allora $F(x) = G(x) + c$, dove G è dispari e c è una costante.

Suggerimento: si studi la derivata delle funzioni $F(x) - F(-x)$ e $F(x) + F(-x)$.

13. Siano $a \in \mathbb{R}_+$ e $b \in \mathbb{R}$, e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che:
(1) Se f è una funzione dispari, allora $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
(2) Se f è una funzione pari, allora $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Il testo dell'esercizio è vero anche se si suppone che f sia solo integrabile su $[-a,a]$ (e non necessariamente continua). In quel caso, però, bisogna dimostrare l'asserto usando la definzione di integrale (approssimazione con funzioni elementari, eccetera eccetera). Assumendo f continua, si può invece sfruttare il Teorema Fondamentale del Calcolo (e l'esercizio precedente).

14. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo a, e sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una primitiva di f.
(1) Si mostri che la funzione $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x+a) - F(x)$ è costante.

(2) Si mostri che, per ogni $b \in \mathbb{R}$, si ha $\int_b^{b+a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$.