ANNO ACCADEMICO 2008/2009
Geometria Superiore II
Esercizi II

Esercizio 1.
Nel seguente esercizio, siete invitati a sfruttare i coni asintotici per dare un'altra dimostrazione di quanto asserito nell'Esercizio 3 del primo foglio.

- Sia $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un embedding biLipschitziano. Si mostri che g è surgettivo (e dunque, è un omeomorfismo). (È lecito usare il seguente risultato, noto come Teorema dell'invarianza del dominio: se $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva, allora è aperta).
- Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un embedding quasi-isometrico. Si mostri che f è una quasi-isometria.

Esercizio 2.
Per ogni $i \in \mathbb{N}$, siano a_i, b_i numeri reali con $a_i \leq 0 \leq b_i$, sia d_i l'usuale metrica Euclidea su $[a_i, b_i]$, sia (0) la successione di puntature costantemente uguale a 0, e sia ω un ultrafiltro non-principale su $\mathbb{N}$. Si mostri che

$$\omega - \lim[a_i, b_i] := \omega - \lim([a_i, b_i], (0), d_i)$$

è isometrico all'intervallo reale $[\omega - \lim a_i, \omega - \lim b_i]$ (si noti che tale intervallo può essere ridotto ad un punto, essere limitato sia inferiormente che superiormente, essere una semiretta chiusa, oppure coincidere con tutto $\mathbb{R}$).

Esercizio 3.
Per ogni $i \in \mathbb{N}$, sia (X_i, x_i, d_i) uno spazio metrico puntato, e sia ω un ultrafiltro non-principale su $\mathbb{N}$. Sia inoltre $\gamma_i\colon [a_i, b_i] \to X_i$ una (k, c_i)-quasigeodetica, dove $\omega - \lim c_i = 0$, e denotiamo con H_i l'immagine di γ_i in X_i.

- Si mostri che $\omega - \lim H_i \neq \emptyset$ se e solo $\omega - \lim d_i(x_i, H_i) < \infty$.
- Si supponga $\omega - \lim d_i(x_i, H_i) < \infty$. Si mostri che per ogni i esiste $\tau_i \in \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà: posto $a'_i = a_i - \tau_i$, $b'_i = b_i - \tau_i$, si ha $0 \in [a'_i, b'_i]$ e, posto $\psi_i\colon [a'_i, b'_i] \to X_i$, $\psi_i(t) = \gamma_i(t + \tau_i)$, allora
$$\omega - \lim \psi_i\colon \omega - \lim[a'_i, b'_i] \to (X_\omega, x_\omega, d_\omega)$$
è una funzione k-biLipschitziana.
- Si mostri che l'immagine di $\omega - \lim \psi_i$ coincide con $\omega - \lim H_i$ (Attenzione: non è completamente ovvio).

In particolare, per quanto visto nell'Esercizio precedente, l'ω-limite di immagini di (k, c_i)-quasigeodetiche (con $\omega - \lim c_i = 0$), qualora non sia vuoto, è esso stesso l'immagine di una curva k-biLipschitziana.

Esercizio 4.
Sia X uno spazio metrico geodetico. Per ogni triangolo $T \subseteq X$, sia $\mathrm{pr}(T)$ il perimetro di T (ovvero, la somma delle distanze tra i vertici di T). Sia $\Omega\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definita da

$$\Omega(t) = \inf\{\delta \,|\, \text{ogni triangolo in } X \text{ con } \mathrm{pr}(T) \leq t \text{ e}' \ \delta - \text{fine}\}.$$

Si mostri che $\Omega(t)$ è limitata se e solo se $\lim_{t\to+\infty} \frac{\Omega(t)}{t} = 0$. (Suggerimento: si sfrutti una opportuna caratterizzazione degli spazi iperbolici).