ESERCIZI

(1) Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n\geq 0} n^n z^n \ , \ \sum_{n\geq 1} n^{-n} z^n \ , \sum_{n\geq 0} 2^n z^n \ , \ \sum_{n\geq 0} 2^{-n} z^n \ , \ \sum_{n\geq 1} (\log(n))^2 z^n \ , \ \sum_{n\geq 0} n^2 z^n \ , \ \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n \ , \ \sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n \ .$$

(2) Siano $a, b \in \mathbb{C}$ tali che b non coincide con alcun numero intero non-positivo. Mostrare che la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)} z^n$$

ha raggio di convergenza almeno uno. Dire quando il raggio di convergenza è uguale a ∞.

(3) Mostrare che le due serie convergono uniformemente su ogni disco chiuso $|z| \leq c$ con $0 < c < 1$:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{nz^n}{1-z^n} \ , \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{(1-z^n)^2} \ .$$

(4) Sia D un aperto di $\mathbb{C}$, sia $f_n \colon D \to \mathbb{C}$ una successione di funzioni olomorfe, e si supponga che la successione f_n converga uniformemente sui compatti ad una funzione $f \colon D \to \mathbb{C}$ (cioè, che esista $f \colon D \to \mathbb{C}$ tale che $f_n|_K$ converga uniformemente a $f|_K$ per ogni compatto K). Si mostri che f è olomorfa. (Suggerimento: si usi la caratterizzazione dell'olomorfia data dal Teorema di Morera).

(5) Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Si determini il più grande aperto D di $\mathbb{C}$ sul quale la serie

$$\sum_{n\geq 1} e^{-an^2 z}$$

definisce una funzione olomorfa.

(6) In questo e nel seguente esercizio, con log intenderemo la branca principale del logaritmo complesso. Si consideri la funzione $f(z) = \log(z^4)$, definita in un intorno U di 1. Si determini un aperto connesso $D \subseteq \mathbb{C}$ con le seguenti proprietà:
   (a) La funzione f si estende a una funzione olomorfa su D (che sarà denotata ancora con f);
   (b) Se $D' \supseteq D$ è un aperto connesso sul quale f ammette un'estensione olomorfa, allora $D' = D$.

Si dica se f ammetta un'estensione continua a $\overline{D}$.

(7) Determinare l'integrale

$$\int_\gamma \sin(z) \mathsf{d}z$$

dall'origine al punto $1 + \imath$, lungo la parabola $y = x^2$.

(8) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{z}{\bar{z}} \mathsf{d}z$$

dove γ è costituita dalla circonferenza $|z| = 1$, percorsa in verso antiorario.

(9) Calcolare
$$\int_\gamma (z-\bar{z})^2 \mathsf{dz}$$
dove γ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ percorso nel verso antiorario.

(10) Sia z_0 un numero complesso e c un numero reale positivo. Definiamo $\gamma(t) = z_0 + t(\imath c)$ per $t \in [-1,1]$. Determinare
$$\lim_{\substack{x\in\mathbb{R},\, x>0 \\ x\to 0}} \int_\gamma \Big(\frac{1}{z-z_0-x} - \frac{1}{z-z_0+x}\Big)\mathsf{dz}\,.$$

(11) Sia x un numero reale positivo. Calcolare il limite
$$\lim_{B\to\infty}\int_{-B}^{B} \Big(\frac{1}{t+\imath x} - \frac{1}{t-\imath x}\Big)\mathsf{dt}$$

(12) Calcolare gli integrali lungo il cerchio γ di centro l'origine e raggio unitario delle seguenti funzioni:
$$\frac{\cos(z)}{z}\,,\ \frac{\sin(z)}{z}\,,\ \frac{\cos(z^2)}{z}\,.$$

(13) Calcolare i seguenti integrali
$$\int_{\partial D} \frac{e^{-z}}{z-\imath\pi/2}\mathsf{dz}\,,\quad \text{dove}\quad D = \{z\in\mathbb{C}\,:\,|\mathsf{Re}(z)|\le 3\,,\ |\mathsf{Im}(z)|\le 3\}\,,$$
$$\int_{\partial D} \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\mathsf{dz}\,,\quad \text{dove}\quad D = \{z\in\mathbb{C}\,:\,|\mathsf{Re}(z)|\le 2\,,\ |\mathsf{Im}(z)|\le 2\}\,,$$
$$\int_{\partial D} \frac{z}{2z+1}\mathsf{dz}\,,\quad \text{dove}\quad D = \{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|\le 2\}\,.$$
Il verso di percorrenza è quello antiorario.

(14) Calcolare
$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z-8)}\mathsf{dz}$$
dove γ è la circonferenza, percorsa nel verso antiorario, di centro $(3,0)$ e raggio

(a) 1,

(b) 4.

(15) Dati $A, B, C \in \mathbb{C}$, calcolare i seguenti integrali:
$$\int_\gamma \frac{A+Bz+Cz^2}{z^n}\mathsf{dz}\,,\quad n = 0,1,2,\ldots$$
dove γ è la circonferenza $|z| = \rho > 0$, percorsa nel verso antiorario.

(16) Sia $u(x,y) = e^{2y}(2\sin^2(x)-1)$. È u la parte reale di una funzione olomorfa?

(17) Determinare per quali valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ la funzione
$$u(x,y) = \cos(x)(e^{ay}+e^{-y})$$
è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$. Trovare tali funzioni f.

(18) Il seguente esercizio descrive una dimostrazione puramente topologica del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Sia $p\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ un polinomio monico di grado d, $d\ge 1$:
$$p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \ldots + a_1 z + a_0\,.$$

Supponiamo per assurdo che valga $p(z) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{C}$. Per ogni $R \geq 0$, sia

$$\gamma_R\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \qquad \gamma(t) = p(Re^{2\pi i t})\,.$$

(a) Si osservi che $\gamma_R(t) \neq 0$ per ogni $R \geq 0$, $t \in [0, 2\pi]$, per cui è ben definito $I(\gamma_R, 0)$.
(b) Si mostri che $I(\gamma_R, 0)$ non dipende da R.
(c) Si calcoli $I(\gamma_0, 0)$.
(d) Sia $\alpha_R\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha_R(t) = R^d e^{2\pi d i t}$. Si mostri che esiste $R_0 > 0$ tale che $|\gamma_R(t) - \alpha_R(t)| < |\alpha_R(t)|$ per ogni $R > R_0$, $t \in [0, 2\pi]$.
(e) Sfruttando un risultato visto a lezione, si mostri che per ogni $R > R_0$ si ha $I(\gamma_R, 0) = I(\alpha_R, 0)$.
(f) Per $R > R_0$, si calcoli $I(\gamma_R, 0)$, e si osservi che il risultato contraddice (b) e (c).

(19) Siano a, b numeri reali positivi. Si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 sin^2 t}\,.$$

(Suggerimento: sia $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una parametrizzazione del bordo dell'ellisse di centro 0 e semiassi a e b; si consideri poi $\int_\gamma dz/z$).