ESERCIZI

(10) Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera e si supponga che esistano costanti $M \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tali che $|f(z)| \leq M \cdot |z|^d$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si mostri che f è un polinomio di grado al più d. (Suggerimento: si sfruttino le disuguaglianze di Cauchy).

Soluzione. Essendo intera, la funzione f ammette uno sviluppo in serie di potenze della forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con raggio di convergenza infinito. Sia

$$M(R) = \sup\{|f(z)|\,,\ |z| = R\}\ .$$

Per ipotesi abbiamo $M(R) \leq MR^d$, dove M è una costante. Se $n > d$, si ha allora, sfruttando le disuguaglianze di Cauchy,

$$|a_n| \leq \frac{M(R)}{R^n} \leq \frac{MR^d}{R^n}$$

da cui, prendendo il limite per $R \to +\infty$, $|a_n| = 0$. Dunque $a_n = 0$ per ogni $n > d$, e f è un polinomio di grado $\leq d$.

(11) Sia f una funzione meromorfa da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, avente un numero finito di poli. Si supponga che esistano costanti $M \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tali che $|f(z)| \leq M \cdot |z|^d$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si mostri che $f(z) = p(z)/q(z)$, dove p, q sono polinomi.

Soluzione. Siano $z_1, \ldots, z_k$ i poli di f, e sia n_i l'ordine di polo di z_i per ogni $i = 1, \ldots, k$. La funzione

$$p(z) = f(z) \cdot \prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{n_i}$$

è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Inoltre, è facile vedere che dalla condizione $|f(z)| \leq M \cdot |z|^d$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ si deduce l'esistenza di una costante M' (eventualmente maggiore di M) tale che

$$|p(z)| = |f(z)| \cdot \prod_{i=1}^{k} |z - z_i|^{n_i} \leq M' \cdot |z|^{d+n_1+n_2+\cdots+n_k}\ .$$

Per l'esercizio precedente si ha allora che p è un polinomio. Posto $q(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{n_i}$ si ha infine $f = p/q$, come voluto.

(12) Un biolomorfismo tra aperti Ω_1, Ω_2 è una funzione olomorfa e bigettiva con inversa olomorfa. (È possibile in effetti dimostrare che l'inversa di una funzione olomorfa e bigettiva è automaticamente olomorfa).

Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un biolomorfismo.

(a) Sia $g: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definita da $g(z) = f(1/z)$. Si mostri che f è un polinomio se e solo se g ha un polo in 0.

(b) Sfruttando il Teorema di Weierstrass–Casorati ed il punto precedente, si mostri che f è un polinomio.

(c) Si concluda che esistono $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ per cui $f(z) = az + b$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Soluzione. (a): Essendo intera, la funzione f ammette uno sviluppo in serie di potenze della forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con raggio di convergenza infinito. Inoltre, esiste $n_0 > 0$ con $a_{n_0} \neq 0$, altrimenti f sarebbe costante, il che contraddice il fatto che sia bigettiva. Ne segue che g ammette lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} a_{-n} z^n \,.$$

Per definizione, allora, g ha un polo in 0 se e solo se il suo sviluppo di Laurent centrato in 0 ha solo un numero finito di termini con esponente negativo, cioè se e solo se $a_{-n} = 0$ per ogni $-n \leq -n_1$ per qualche $n_1 \in \mathbb{N}$, il che è equivalente al fatto che a_n sia nullo per ogni $n \geq n_1$, ovvero al fatto che f sia un polinomio.

(b): Supponiamo per assurdo che f non sia un polinomio. Per quanto visto al punto precedente, g ha allora una singolarità essenziale in 0. Pertanto, se $D^* = B(0,1) \setminus \{0\}$ è il disco unitario aperto privato dell'origine, allora $g(D^*)$ è denso in $\mathbb{C}$. D'altro canto, poiché g è iniettiva (in quanto composizione di funzioni iniettive), si ha

$$\emptyset = g(D^*) \cap g(\{|z| > 1\}) = g(D^*) \cap f(D^*) \,.$$

Ma f, essendo un biolomorfismo, è un omeomorfismo, dunque $f(D^*)$ è aperto in $\mathbb{C}$. Ciò contraddice la densità di $g(D^*)$, e prova infine che f è un polinomio.

(c): Sia d il grado di f. Se fosse $d = 0$, f sarebbe costante, e non potrebbe essere bigettiva. Se fosse $d \geq 2$, f sarebbe non iniettiva (perché?), e non potrebbe dunque essere un biolomorfismo. Dunque $d = 1$, il che è equivalente alla tesi.

(13) Si mostri che la funzione

$$f(z) = \frac{z - \imath}{z + \imath}$$

stabilisce un biolomorfismo tra il semipiano $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \Im(z) > 0\}$ e il disco unitario $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$.

Soluzione. Sia $z \in \Omega_1$. Allora $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, e $|z - i| = |a + (b-1)i| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$, mentre $|z + i| = |a + (b+1)i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$. Ora dal fatto che $b > 0$ segue banalmente che $(b+1)^2 > (b-1)^2$, per cui $|z - i| < |z + i|$, e $f(z)$ appartiene effettivamente a Ω_2. Dunque $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$.

Invertendo formalmente la formula che definisce f si ottiene la funzione

$$g\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}\,, \qquad g(z) = -i\frac{z+1}{z-1}\,.$$

Vogliamo mostrare che $g(\Omega_2) \subseteq \Omega_1$, ovvero che, se $|z| < 1$, allora $\Im(g(z)) > 0$. Ora

$$\Im(g(z)) = \Im\left(-i\frac{z+1}{z-1}\right) = -\Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = -\Re\left(\frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)}\right) = -\Re\left(\frac{z\bar{z} + \bar{z} - z - 1}{|z-1|^2}\right)$$

Ora, $|z-1|^2$ è reale e positivo, per cui il segno di $\Im(g(z))$ è uguale al segno di $\Re(-z\bar{z} - \bar{z} + z + 1)$. Ora $-\bar{z} + z$ è immaginario puro, e $-z\bar{z} + 1 = 1 - |z|^2$ è reale e positivo in quanto $|z| < 1$. Dunque $\Im(g(z)) > 0$.

Abbiamo così dimostrato che $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ e $g(\Omega_2) \subseteq \Omega_1$. Si verifica ora facilmente che $f(g(z)) = z$ e $g(f(z)) = z$ ogni qual volta queste uguaglianze abbiano senso, e ciò conclude la dimostrazione.

(14) Il semipiano Ω_1 introdotto nell'esercizio precedente è biolomorfo a $\mathbb{C}$? (Suggerimento: si sfruttino l'esercizio precedente e il Teorema di Liouville).

Soluzione. Per quanto visto nel punto precedente, se il semispazio fosse biolomorfo a $\mathbb{C}$, anche il disco unitario aperto D sarebbe biolomorfo a $\mathbb{C}$. Ma una qualsiasi funzione olomorfa $f\colon \mathbb{C} \to D$ è limitata, e dunque costante per Liouville. In particolare, non esistono funzioni olomorfe bigettive da D a $\mathbb{C}$, dunque $\mathbb{C}$ e il semispazio non sono biolomorfi.