Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 13/6/2018

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1.

Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare parametrizzata per lunghezza d'arco, con supporto contenuto nel semipiano $x > 0$ del piano di coordinate (x, z).

(i) Si scriva una parametrizzazione per la superficie di rotazione S ottenuta ruotando in $\mathbb{R}^3$ il supporto di α rispetto all'asse z.

(ii) Si definiscano meridiani e paralleli di S, e si mostri che tutti i meridiani sono geodetiche di S.

(iii) Si caratterizzino i paralleli di S che sono geodetiche.

Soluzione. Svolto a lezione.

Esercizio 2. (10 punti)
Siano $\alpha_1, \alpha_2\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ curve biregolari distinte aventi triedri di Frenet t_1, n_1, b_1, e t_2, n_2, b_2, rispettivamente. Si assuma anche che α_1 sia parametrizzata per lunghezza d'arco.

Si assuma che $\alpha_1(s) \neq \alpha_2(s)$ e che la retta che congiunge $\alpha_1(s)$ con $\alpha_2(s)$ sia parallela sia a $n_1(s)$ sia a $n_2(s)$ per ogni $s \in (a, b)$.

(i) Si mostri che esiste una costante non nulla $R \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha_2(s) = \alpha_1(s) + Rn_1(s)$ per ogni $s \in (a, b)$.

(ii) Si mostri che esiste una costante $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $\langle t_1(s), t_2(s)\rangle = \cos\theta$ per ogni $s \in (a, b)$.

(iii) Si mostri che, per ogni $s \in (a, b)$, si ha

$$\cos\theta = \frac{1 - R\kappa_1(s)}{\|\alpha_2'(s)\|}\ , \qquad \sin\theta = \pm\frac{\tau_1(s) \cdot R}{\|\alpha_2'(s)\|}\ ,$$

dove κ_1 e τ_1 sono la curvatura e la torsione di α_1.

(iv) Si assuma ora che $\tau_1(s_0) \neq 0$ per qualche $s_0 \in (a, b)$. Si mostri che la cotangente $\operatorname{ctg}\theta$ è ben definita, e che si ha

$$\kappa_1(s) + \operatorname{ctg}\theta \cdot \tau_1(s) = \frac{1}{R}$$

oppure

$$\kappa_1(s) - \operatorname{ctg}\theta \cdot \tau_1(s) = \frac{1}{R}$$

per ogni $s \in (a, b)$.

Soluzione. (i): Per ipotesi si ha $\alpha_2(s) = \alpha_1(s) + R(s)n_1(s)$, dove $R\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia. Derivando questa uguaglianza e utilizzando le formule di Frenet si ottiene

$$\|\alpha_2'(s)\|t_2(s) = (1 - R(s)\kappa_1(s))t_1(s) + R'(s)n_1(s) - R(s)\tau_1(s)b_1(s)\ . \tag{1}$$

Osserviamo che dalle ipotesi discende $n_1(s) = \pm n_2(s)$ per ogni $s \in (a, b)$. Prendendo il prodotto scalare di ambo i membri di (1) con $n_1(s) = \pm n_2(s)$ si ottiene $R'(s) = 0$, che è la tesi (si osservi che $R(s) \neq 0$ in quanto $\alpha_1(s) \neq \alpha_2(s)$ per ogni $s \in (a, b)$.

In alternativa si può ragionare come segue. Derivando la quantità $R^2 = \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|^2 = \langle \alpha_1(s) - \alpha_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \rangle$ si ottiene

$$2\langle t_1(s) - \|\alpha_2'(s)\| \cdot t_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \rangle = 2\langle t_1(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \rangle - 2\|\alpha_2'(s)\| \langle t_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \rangle \ ,$$

che si annulla in quanto, per ipotesi, sia $t_1(s)$ sia $t_2(s)$ sono perpendicolari a $\alpha_1(s) - \alpha_2(s)$. Dunque R^2 è costante, da cui la tesi per continuità di R.

(ii): Dalle ipotesi discende che $n_2(s) = \pm n_1(s)$ per ogni $s \in (a, b)$, per cui derivando la funzione $\langle t_1(s), t_2(s) \rangle$ si ottiene (si osservi che $t_2'(s) = \|\alpha_2'(s)\| \cdot \kappa_2(s) n_2(s)$)

$$\kappa_1(s)\langle n_1(s), t_2(s)\rangle + \|\alpha_2'(s)\| \cdot \kappa_2(s) \langle t_1(s), n_2(s) \rangle = \pm \kappa_1(s) \langle n_2(s), t_2(s) \rangle \pm \|\alpha_2'(s)\| \cdot \kappa_2(s) \langle t_1(s), n_1(s) \rangle = 0 \ ,$$

il che è equivalente alla tesi.

(iii) Poiché $R = R(s)$ è costante, l'uguaglianza (1) ci dà

$$\|\alpha_2'(s)\| \cdot t_2(s) = (1 - R\kappa_1(s)) t_1(s) - R\tau_1(s) b_1(s) \ ,$$

da cui

$$t_2(s) = \frac{1 - R\kappa_1(s)}{\|\alpha_2'(s)\|} t_1(s) - \frac{R\tau_1(s)}{\|\alpha_2'(s)\|} b_1(s) \ , \tag{2}$$

Prendendo il prodotto scalare dei due membri di questa equazione con $t_1(s)$ si ottiene

$$\cos\theta = \frac{1 - R\kappa_1(s)}{\|\alpha_2'(s)\|} \ ,$$

mentre uguagliando le norme dei due membri di (2) si ha

$$\frac{(1 - R\kappa_1(s))^2}{\|\alpha_2'(s)\|^2} + \frac{R^2 \tau_1(s)^2}{\|\alpha_2'(s)\|^2} = 1 \ ,$$

da cui

$$|\sin\theta| = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{(1 - R\kappa_1(s))^2}{\|\alpha_2'(s)\|^2}} = \sqrt{\frac{R^2\tau_1(s)^2}{\|\alpha_2'(s)\|^2}} = \frac{|R\tau_1(s)|}{\|\alpha_2'(s)\|} \ .$$

(iv): Poiché θ ed R sono costanti e $\alpha_2'(s) \neq 0$ per ogni $s \in (a, b)$, dal punto precedente si deduce che $\tau_1(s) \neq 0$ per ogni $s \in (a, b)$. Inoltre

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \pm \frac{1 - R\kappa_1(s)}{R\tau_1(s)} \ .$$

A meno di sostituire $\operatorname{ctg}\theta$ con $-\operatorname{ctg}\theta$, possiamo assumere che valga

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{1 - R\kappa_1(s)}{R\tau_1(s)} \ .$$

Allora

$$\kappa_1(s) + \operatorname{ctg}\theta \cdot \tau_1(s) = \kappa_1(s) + \frac{1 - R\kappa_1(s)}{R} = \frac{1}{R} \ ,$$

come voluto.

Esercizio 3. (11 punti)
Sia $x \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la mappa definita da $x(u, v) = (u, v, uv)$.

(i) Si mostri che x è la parametrizzazione globale di una superficie S in $\mathbb{R}^3$.

(ii) Si calcolino la prima e la seconda forma fondamentale di S rispetto alla parametrizzazione x.

(iii) Si calcoli la curvatura gaussiana di S in ogni suo punto.

(iv) Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to S$ una curva asintotica, ovvero una curva parametrizzata per lunghezza d'arco la cui curvatura normale sia costantemente nulla. Si mostri che il supporto di γ è contenuto in una retta.

Soluzione. (i): Posto $S = x(\mathbb{R}^2)$, la proiezione $\pi\colon S \to \mathbb{R}^2$ data da $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ definisce un'inversa liscia di x. Pertanto, x è un diffeomorfismo, ed è perciò una parametrizzazione globale della superficie S.

(ii): Si ha $x_u = (1, 0, v)$, $x_v = (0, 1, u)$, da cui

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(-v, -u, 1)}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \ .$$

Inoltre, $x_{uu} = x_{vv} = 0$ e $x_{uv} = x_{vu} = (0, 0, 1)$. Da ciò segue che le matrici della prima e della seconda forma fondamentale sono date rispettivamente da

$$\begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix} , \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

(iii): Essendo il rapporto dei determinanti della seconda e della prima forma fondamentale, la curvatura gaussiana è data da

$$K(u, v) = -\frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} \ .$$

(iv): Siano $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni lisce tali che $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (per costruire tali funzioni è sufficiente scegliere porre $(u(t), v(t)) = \pi(\gamma(t))$). Abbiamo allora $\gamma' = u'x_u + v'x_v$. Il fatto che γ sia asintotica si traduce nel fatto che la forma quadratica associata alla seconda forma fondamentale valga 0 su (u', v'), ovvero si abbia $u'v' = 0$. Poiché u', v' sono continue, i sottoinsiemi $\Omega_u = \{t \in \mathbb{R} \,|\, u'(t) = 0\}$, $\Omega_v = \{t \in \mathbb{R} \,|\, v'(t) = 0\}$ sono chiusi. Essi sono inoltre disgiunti, in quanto se $u'(t_0) = v'(t_0) = 0$, allora $\gamma'(t_0) = 0$, contro il fatto che γ è p.l.a. Infine, $\Omega_u \cup \Omega_v = \mathbb{R}$, in quanto $u'(t)v'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per connessione di $\mathbb{R}$, si ha allora $u'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ o $v'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Nel primo caso esiste una costante a tale che $\gamma(t) = x(a, v(t)) = (a, v(t), av(t))$, per cui il supporto di γ è contenuto nella retta $(a, 0, 0) + \lambda(0, 1, a)$. Nel secondo caso esiste una costante a tale che $\gamma(t) = x(u(t), a) = (u(t), a, au(t))$, per cui il supporto di γ è contenuto nella retta $(0, a, 0) + \lambda(1, 0, a)$.