Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 1/2/2018

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compatta senza bordo. Si dimostri che esiste $p \in S$ tale che la curvatura Gaussiana di S in p sia strettamente maggiore di 0.
Soluzione. Svolto a lezione.

Esercizio 2. (10 punti)
L'esercizio dato in classe era errato.

Esercizio 3. (11 punti)
Sia S la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(t) = (2 + \cos t, 0, t) \ ,$$

e per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $Z_a = S \cap \{z = a\}$.

(i) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si esibisca una curva periodica parametrizzata per lunghezza d'arco $\beta_a\colon \mathbb{R} \to S$ il cui supporto coincida con Z_a.

(ii) Si calcoli la curvatura geodetica di β_a in ogni suo punto.

(iii) Sia $a > 0$ e sia $R_a = S \cap \{0 \leq z \leq a\}$. Assumendo che R_a sia una regione, si calcoli

$$\int_{R_a} K \ ,$$

dove K è la curvatura Gaussiana di S (e l'integrale si intende ovviamente rispetto alla forma d'area di S).

Soluzione. (i): La curva richiesta è data da

$$\beta_a(s) = \left((2 + \cos a) \cos \frac{s}{2 + \cos a}, (2 + \cos a) \sin \frac{s}{2 + \cos a}, a \right) \ .$$

In quanto ci serviranno al punto seguente, calcoliamo derivata prima e seconda di β_a, ottenendo

$$\beta_a'(s) = \left(-\sin \frac{s}{2 + \cos a}, \cos \frac{s}{2 + \cos a}, 0 \right) \ ,$$

$$\beta_a''(s) = \left(-\frac{1}{2 + \cos a} \cos \frac{s}{2 + \cos a}, -\frac{1}{2 + \cos a} \sin \frac{s}{2 + \cos a}, 0 \right) \ .$$

(ii): Calcoliamo innanzi tutto un versone normale a S. A tale scopo, sia $x\colon \mathbb{R}^2 \to S$ la usuale parametrizzazione locale data da

$$x(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, v) \ .$$

Allora

$$x_u = (-(2 + \cos v) \sin u, (2 + \cos v) \cos u, 0) \ , \qquad x_v = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, 1) \ ,$$

per cui

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(\cos u, \sin u, \sin v)}{\sqrt{1+\sin^2 v}} \ .$$

Dunque, poiché $\beta_a(s) = x(s/(2+\cos a), a)$, la curvatura geodetica di β_a in s è data da

$$\kappa_g(s) = \langle \beta_a''(s), N(\beta_a(s)) \wedge \beta_a'(s) \rangle = \frac{\sin a}{(2+\cos a)\sqrt{1+\sin^2 a}} \ .$$

(iii): Per la formula di Gauss-Bonnet, essendo il bordo di R_a privo di punti angolosi, abbiamo

$$\int_{R_a} K + \int_{\partial R_a} k_g(s)\, ds = 2\pi\chi(R_a) \ .$$

Osserviamo che il bordo di R_a è dato dall'unione del supporto della curva β_0 (che ha curvatura geodetica nulla) e del supporto della curva β_a, la cui orientazione però è opposta a quella che ∂R_a eredita da R_a (che a sua volta è orientata dalla normale N). Dunque

$$\int_{\partial R_a} k_g(s) = -\int_0^{2\pi(2+\cos a)} \frac{\sin a}{(2+\cos a)\sqrt{1+\sin^2 a}}\, ds = -\frac{2\pi \sin a}{\sqrt{1+\sin^2 a}} \ .$$

Inoltre, poiché R_a è diffeomorfa a un cilindro, si ha $\chi(R_a) = 0$, per cui concludiamo che

$$\int_{R_a} K = \frac{2\pi \sin a}{\sqrt{1+\sin^2 a}} \ .$$