Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 10/1/2019

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (8 punti)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie e sia $p \in S$ tale che $k(p) > 0$, dove k denota la curvatura gaussiana. Si dimostri che esiste un intorno U di p in S tale che l'insieme $U \setminus \{p\}$ giace tutto in uno solo dei due semispazi di $\mathbb{R}^3$ bordati da $p + T_pS$.

Soluzione.
Svolto a lezione.

Esercizio 2. (10 punti)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientabile dotata di versore normale $N\colon S \to S^2$, e sia $\gamma\colon I \to S$ una curva regolare tale che $\gamma''(t) \in \mathrm{Span}\langle \gamma'(t), N(\gamma(t))\rangle$ per ogni $t \in I$.

(i) Si mostri che γ ammette una riparametrizzazione che la rende una geodetica.

Siano ora $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\ z = e^{-x^2-y^2}\}$ e $\gamma\colon \mathbb{R} \to S$ data da $\gamma(t) = (t, 0, e^{-t^2})$.

(ii) Si dimostri che S è una superficie.

(iii) Si mostri che un'opportuna riparametrizzazione di γ è una geodetica di S.

Soluzione. Sia $\beta\colon J \to S$ una riparametrizzazione per lunghezza d'arco di γ, in modo che $\beta = \gamma \circ \psi$, dove $\psi\colon J \to I$ è un diffeomorfismo. Allora

$$\beta'(s) = \gamma'(\psi(s))\psi'(s)\,, \qquad \beta''(s) = \gamma''(\psi(s))(\psi'(s))^2 + \gamma'(\psi(s))\psi''(s)\ .$$

In particolare, $\beta''(s) \in \mathrm{Span}\langle \gamma'(\psi(s)), N(\gamma(\psi(s)))\rangle = \mathrm{Span}\langle \beta'(s), N(\beta(s))\rangle$. Tuttavia, poiché la norma di β' è costante, si ha $\beta''(s) \perp \beta'(s)$ per ogni $s \in J$, per cui necessariamente $\beta''(s) \in \mathrm{Span}\langle N(\beta(s))\rangle$, ovvero β è una geodetica.

(ii): L'insieme S è il luogo di zeri della funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z - e^{-x^2-y^2}$, il cui gradiente è dato da $\widetilde{N}(x, y, z) = (2xe^{-x^2-y^2}, 2ye^{-x^2-y^2}, 1)$, ed è perciò mai nullo. Ne segue che S è una superficie, e che un versore normale di S nel punto (x, y, z) è dato dalla normalizzazione di $\widetilde{N}$.

(iii): Si ha $\gamma'(t) = (1, 0, -2te^{-t^2})$, $\gamma''(t) = (0, 0, -2e^{-t^2} + 4t^2e^{-t^2})$. In particolare, $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, cioè γ è regolare. Notiamo ora che $\gamma'(t)$ e $\widetilde{N}(\gamma(t))$ giacciono entrambi sul piano $\{y = 0\}$ e sono linearmente indipendenti (in quanto sono entrambi non nulli e perpendicolari), per cui $\mathrm{Span}\langle \gamma'(t), N(\gamma(t))\rangle = \{y = 0\}$. Poiché $\gamma''(t)$ giace su $\{y = 0\}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, per quanto visto in (i) ciò è sufficiente per concludere che la riparametrizzazione per lunghezza d'arco di γ è una geodetica.

Esercizio 3. (12 punti)
Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco, e siano t, n, b il triedro di Frenet e $\kappa, \tau\colon I \to \mathbb{R}$ rispettivamente la curvatura e la torsione di α. Si supponga inoltre $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$, e siano $R(s) = 1/\kappa(s)$, $T(s) = 1/\tau(s)$ per ogni $s \in I$.

(i) Si mostri che, se il supporto di α è contenuto in una sfera, allora la quantità

$$R(s)^2 + R'(s)^2 T(s)^2$$

è costante.

Si supponga ora che la quantità $R(s)^2 + R'(s)^2 T(s)^2$ sia costante e che $R'(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$.

(ii) Si mostri che $R(s)\tau(s) + (TR')'(s) = 0$ per ogni $s \in I$.

(iii) Si mostri che la quantità $\beta(s) = \alpha(s) + R(s)n(s) - R'(s)T(s)b(s)$ è costante.

(iv) Si mostri che il supporto di α è contenuto in una sfera.

Soluzione. (i): Per ipotesi, esiste $q \in \mathbb{R}^3$ tale che $\langle \alpha(s) - q, \alpha(s) - q \rangle = c$, dove c è una costante. Derivando due volte questa uguaglianza si ottiene

$$\langle t(s), \alpha(s) - q \rangle = 0 \,, \qquad \kappa(s)\langle n(s), \alpha(s) - q \rangle = -\langle t(s), t(s) \rangle = -1 \ ,$$

da cui

$$\langle n(s), \alpha(s) - q \rangle = -\frac{1}{\kappa(s)} = -R(s) \ .$$

Derivando ancora questa uguaglianza si ha

$$-\kappa(s)\langle t(s), \alpha(s) - q \rangle - \tau(s)\langle b(s), \alpha(s) - q \rangle = -R'(s) \ .$$

Poiché $\langle t(s), \alpha(s) - q \rangle = 0$, se ne deduce

$$\langle b(s), \alpha(s) - q \rangle = \frac{R'(s)}{\tau(s)} = R'(s)T(s) \ .$$

Pertanto, le coordinate di $\alpha(s) - q$ rispetto alla base ortonormale $t(s), n(s), b(s)$ sono date da $(0, -R(s), R'(s)T(s))$. Poiché la norma di $\alpha(s) - q$ è costante, se ne deduce che

$$0^2 + (-R(s))^2 + (R'(s)T(s))^2 = R(s)^2 + R'(s)^2 T(s)^2$$

è costante, come voluto.

(ii): Derivando la quantità costante $R(s)^2 + R'(s)^2 T(s)^2$ si ottiene

$$0 = 2RR' + 2R'T(R'T)' = 2R'T\left(\frac{R}{T} + (R'T)'\right) = 2R'T(R\tau + (R'T)') \ ,$$

da cui la tesi in quanto $R'(s)T(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$.

(iii): Derivando β si ottiene

$$\beta' = t + R'n + R(-\kappa t - \tau b) - (R'T)'b - R'T\tau n = (1 - \kappa R)t + (R' - R'T\tau)n + (-R\tau - (R'T)')b = 0$$

in quanto $\kappa R = T\tau = 1$ per definizione, e $R\tau + (R'T)' = 0$ per quanto visto al punto precedente.

(iv): Per quanto visto al punto precedente esiste $q \in \mathbb{R}^3$ tale che $\beta(s) = q$ per ogni $s \in I$, e si ha

$$\|\alpha(s) - q\|^2 = \| - R(s)n(s) + R'(s)T(s)b(s)\|^2 = R(s)^2 + R'(s)^2 T(s)^2 \ ,$$

che è costante per ipotesi. Dunque il supporto di α è contenuto in una sfera centrata in q.