

Esercizio 1. Calcolare centralizzatore e normalizzatore di $(1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8)(9, 10)$ in S_{10} .

Esercizio 2. Sia $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

- Dimostrare che un automorfismo ϕ di G è determinato se si conoscono $\phi([1], [0])$ e $\phi([1], [1])$.
- Dimostrare che $Aut(G)$ ha al più 8 elementi.
- Consideriamo $r : G \rightarrow G$ e $s : G \rightarrow G$ definite da

$$r([x], [y]) = x([1], [1]) + y([2], [1])$$

$$s([x], [y]) = x([1], [0]) + y([2], [1])$$

Dimostrare che le mappe r e s sono ben definite e che si tratta di elementi di $Aut(G)$.

- Dimostrare che $Aut(G) \cong D_4$.

PER CASA

Esercizio 3. Calcolare centralizzatore e normalizzatore di $(1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8)(9, 10)$ in A_{10} .

Esercizio 4.

Sia G un p -gruppo e sia H un suo sottogruppo normale non banale. Dimostrare che H interseca non banalmente $Z(G)$.

Esercizio 5.

Siano H e K due gruppi finiti di ordini coprimi e sia G il loro prodotto diretto. Mostrare che $H \times \{e_K\}$ e $\{e_H\} \times K$ sono sottogruppi caratteristici di G .

Esercizio 6.

Classificare i gruppi di ordine 231.

Esercizio 7.

- Dimostrare che se un gruppo finito semplice G ha un sottogruppo di indice n allora G è isomorfo ad un sottogruppo di A_n .
- Dimostrare che un gruppo di ordine 112 non è semplice.

Esercizio 8.

Dimostrare che un gruppo di ordine 144 non è semplice.

Esercizio 9. Sia $n \geq 6$ e sia H un sottogruppo di A_n diverso da $\{e\}$. Supponiamo che valga $\sigma(i) \neq i$ per ogni $\sigma \in H$ diverso da e e per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

- Dati $\sigma_1, \sigma_2 \in H$, dimostrare che se per un certo i vale $\sigma_1(i) = \sigma_2(i)$ allora $\sigma_1 = \sigma_2$.
- Dimostrare che H non è un sottogruppo normale di A_n .

[Una strategia possibile per trovare un assurdo: dato un $\tau \in H$, trovare (facendo alcuni casi dipendenti dalla possibile decomposizione in cicli di τ) un elemento coniugato $\sigma\tau\sigma^{-1}$ tale che, per certi $i \neq j$, valga $\sigma\tau\sigma^{-1}(i) = \tau(i)$ e $\sigma\tau\sigma^{-1}(j) \neq \tau(j)$].

Esercizio 10. Dimostriamo che, per ogni $n \geq 5$, A_n è semplice. Per A_5 lo abbiamo già dimostrato. Ecco la traccia di una dimostrazione per induzione su n , che utilizza anche il risultato dell' esercizio precedente.

Sia $n \geq 6$ e sia H un sottogruppo normale di A_n diverso da $\{e\}$. Supponiamo di sapere che A_{n-1} è semplice. Dimostrare che per ogni $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$G_j = \text{Stab}_{A_n}(j) \subset H.$$

Dimostrare quindi, sempre supponendo che A_{n-1} sia semplice, che A_n coincide con il sottogruppo generato da $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ e dunque con H .