Risoluzione di un esercizio (il punto difficile dell'esercizio 8 della scheda per casa)

Esercizio Trovare gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Risoluzione. Come sappiamo, un elemento $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ è invertibile se e solo se la sua *lunghezza* $l(a+b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$ è uguale a 1 o a -1. Osserviamo per esempio che $1+\sqrt{2}$ è invertibile e anche $1-\sqrt{2}$ (fra l'altro notiamo che $(1+\sqrt{2})^{-1} = -(1-\sqrt{2})$).
Tutti gli elementi della forma $\pm(1+\sqrt{2})^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ sono invertibili. Infatti se $u = a + b\sqrt{2}$ è invertibile allora è invertibile anche $\bar{u} = a - b\sqrt{2}$, perché $l(u) = \pm 1 = l(\bar{u}) = u\bar{u}$, e dunque $l(u^k) = u^k\overline{(u^k)} = (u\bar{u})^k = (\pm 1)^k = \pm 1$ (ricordiamo che se z e w appartengono a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ abbiamo $\overline{(zw)} = \overline{z}\ \overline{w}$ dunque $\overline{(u^k)} = (\overline{u})^k$).

Dimostriamo che $U = \{\pm(1+\sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ è l'insieme di tutti gli invertibili. Basta controllare che in U troviamo tutti gli invertibili positivi. Sia u un invertibile positivo, allora esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$(1+\sqrt{2})^k \leq u < (1+\sqrt{2})^{k+1}$$

Da questo si ricava

$$1 \leq u(1+\sqrt{2})^{-k} < 1+\sqrt{2}$$

Ora $u(1+\sqrt{2})^{-k}$ è prodotto di invertibili dunque è invertibile, scriviamolo come $c+d\sqrt{2}$. Quindi abbiamo le due relazioni:

$$1 \leq c+d\sqrt{2} < 1+\sqrt{2} \qquad\qquad c^2 - 2d^2 = \pm 1$$

Ora, l'inverso di $c+d\sqrt{2}$ è $c-d\sqrt{2}$ oppure $-(c-d\sqrt{2})$. Nel primo caso dalla disuguaglianza

$$1 \leq c+d\sqrt{2} < 1+\sqrt{2}$$

passando agli inversi, otteniamo

$$\sqrt{2}-1 < c-d\sqrt{2} \leq 1$$

Sommando le due disuguaglianze membro a membro si ricava

$$\sqrt{2} < 2c < 2+\sqrt{2}$$

la cui unica soluzione intera è $c = 1$. Da questo usando la

$$1 \leq c+d\sqrt{2} < 1+\sqrt{2}$$

ricaviamo subito che $d = 0$ e dunque $u(1+\sqrt{2})^{-k} = 1$ cioé $u = (1+\sqrt{2})^k$ ossia u appartiene a U.
Se invece l'inverso di $c+d\sqrt{2}$ fosse $-(c-d\sqrt{2})$ otterremmo

$$\sqrt{2}-1 < d\sqrt{2}-c \leq 1$$

che, sommata con la

$$1 \leq c+d\sqrt{2} < 1+\sqrt{2}$$

ci darebbe

$$\sqrt{2} < 2d\sqrt{2} < 2+\sqrt{2}$$

che ha come unica soluzione intera $d = 1$. Ma si nota che nessun valore intero di c rende vera la disuguaglianza

$$\sqrt{2}-1 < \sqrt{2}-c \leq 1$$

dunque il caso che stiamo considerando non capita.