Appunti del corso di Elementi di Algebra Superiore

Prof. Giovanni Gaiffi (A.A. 2007/08)

Giacomo d'Antonio

6 ottobre 2008

Indice

Capitolo 1

Moduli

26/02/08

Definizione 1. Sia Λ un anello con unità (non necessariamente commutativo), M un gruppo abeliano; se esiste $\omega : \Lambda \to \operatorname{End} M$ omomorfismo di anelli allora M si dice Λ-*modulo*.

Possiamo anche presentare un modulo nel seguente, più familiare, modo:

Definizione 2. Un gruppo abeliano M si dice Λ-*modulo sinistro* se esiste un'applicazione $\omega : \Lambda \times M \to M$ (e scriviamo $\omega(\lambda, v) = \lambda v$) tale che per ogni $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ e $v, v_1, v_2 \in M$ valgono:

(1) $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$

(2) $(\lambda_1 \lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v)$

(3) $1v = v$

(4) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

Se tentiamo di interpretare ω nella definizione 1 come moltiplicazione a destra incappiamo in un problema:

$$\begin{aligned} v(\lambda_1\lambda_2) = \omega(\lambda_1\lambda_2)(v) = (\omega(\lambda_1) \circ \omega(\lambda_2))(v) = \omega(\lambda_1)(\omega(\lambda_2)(v)) = \\ \omega(\lambda_1)(v\lambda_2) = (v\lambda_2)\lambda_1. \end{aligned}$$

Per ovviare definiamo

$$\Lambda^{opp} = \{\lambda^{opp} :\ \lambda \in \Lambda\}.$$

Λ^{opp} è un anello con le operazioni

$$\begin{aligned} \lambda_1^{opp} + \lambda_2^{opp} &= (\lambda_1 + \lambda_2)^{opp} \\ \lambda_1^{opp}\lambda_2^{opp} &= (\lambda_2\lambda_1)^{opp}. \end{aligned}$$

Definizione 3. Un gruppo abeliano M si dice Λ-*modulo destro* se è un Λ^{opp}-modulo sinistro.

Esempio 1. - Sia K un campo e V un K-spazio vettoriale; $T \in \operatorname{End} V$; consideriamo l'anello $K[T]$ (dei polinomi in T a coefficienti in K); allora $K[T]$ agisce nel modo noto su V e V risulta essere un $K[T]$-modulo.

- Sia G un gruppo finito che agisce su di uno spazio vettoriale V; cioè esiste un omomorfismo $\rho : G \to \operatorname{Aut} V$ (e scriviamo $\rho(g)(v) = gv$); costruiamo l'anello

$$K[G] = \left\{ \sum_{g \in G} \gamma_g g \, : \, \gamma_g \in K \right\},$$

con la moltiplicazione

$$\left(\sum_{g \in G} \gamma_g g \right) \left(\sum_{x \in G} \gamma_x x \right) = \sum_{g, x \in G} \gamma_g \gamma_x g x;$$

allora V è un $K[G]$-modulo con l'azione ρ.

Definizione 4. Dati M, N Λ-moduli, $\varphi : M \to N$ si dice *omomorfismo di Λ-moduli* se è un omomorfismo di gruppi abeliani e per ogni $\lambda \in \Lambda, v \in M$ $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$.

Definizione 5. Sia $\varphi : A \to B$ omomorfismo di Λ-moduli; il *conucleo* di φ è $\operatorname{coKer} \varphi = B / \operatorname{Im} \varphi$.

La notazione del seguente teorema verrà utilizzata durante tutto il corso; si legge "dato il seguente diagramma commutativo di Λ-moduli con righe esatte vale..".

Teorema 1. Λ

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\eta"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Se due tra α, $\alpha^{'}$ e $\alpha^{''}$ sono isomorfismi allora anche il terzo lo è.

Dimostrazione. **(Caso α', $\alpha^{''}$ isomorfismi)** Mostriamo l'iniettività di α; sia $a \in \operatorname{Ker} \alpha$, allora $\alpha^{''} \circ \varepsilon(a) = \beta \circ \alpha(a) = 0 \Rightarrow$ ($\alpha^{''}$ iniettivo) $a \in \operatorname{Ker} \varepsilon = \operatorname{Im} \nu \Rightarrow a = \nu(a')$. Ora $\eta \circ \alpha'(a') = \alpha \circ \nu(a') = 0 \Rightarrow$ (α' ed η iniettivi) $a' = 0 \Rightarrow a = 0$. Vediamo la surgettività; sia $b \in B$, $\alpha^{''} \circ \varepsilon$ surgettiva $\Rightarrow \beta(b) = \alpha^{''} \circ \varepsilon(a)$ e $\beta \circ \alpha(a) = \alpha^{''} \circ \varepsilon(a) = \beta(b) \Rightarrow b - \alpha(a) \in \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \eta \Rightarrow b = \alpha(a) + \eta(b')$. Ma α' è surgettiva, perciò $b' = \alpha'(a')$ ed $\eta(b') = \eta \circ \alpha'(a') = \alpha \circ \nu(a')$ da cui $b = \alpha(a + \nu(a'))$.

(Caso α, $\alpha^{''}$ isomorfismi) Sia $a \in \operatorname{Ker}\varepsilon$, allora $\beta \circ \alpha(a) = \alpha^{''} \circ \varepsilon(a) = 0 \Rightarrow \alpha(a) \in \operatorname{Ker}\beta$, d'altronde se $\alpha(a) \in \operatorname{Ker}\beta$ allora $\alpha^{''} \circ \varepsilon(a) = 0 \Rightarrow a \in \operatorname{Ker}\varepsilon$; perciò $\alpha(\operatorname{Ker}\varepsilon) = \operatorname{Ker}\beta$ ed $\alpha_{|\operatorname{Ker}\varepsilon} : \operatorname{Ker}\varepsilon \to \operatorname{Ker}\beta$ è un isomorfismo. Ora $\nu : A' \to \operatorname{Ker}\varepsilon$ ed $\eta : B' \to \operatorname{Ker}\beta$ sono isomorfismi, inoltre per la commutatività del diagramma $\alpha' = \eta^{-1} \circ \alpha_{|\operatorname{Ker}\varepsilon} \circ \nu$ ed è isomorfismo.

(Caso α', α isomorfismi) Osserviamo che $\alpha \circ \nu(A') = \eta \circ \alpha^{'}(A') = \eta(B')$ (perché α' è surgettivo). Dunque α induce un isomorfismo sui conuclei

$$\begin{gathered} \widetilde{\alpha} : A/\nu(A') \to B/\eta(B') \\ [a] \mapsto [\alpha(a)]. \end{gathered}$$

D'altra parte anche ε e β inducono isomorfismi

$$\begin{gathered} \widetilde{\varepsilon} : A/\nu(A') \to A^{''}, \\ [a] \mapsto \varepsilon(a) \end{gathered} \quad \begin{gathered} \widetilde{\beta} : B/\eta(B') \to B^{''} \\ [b] \mapsto \beta(b) \end{gathered}$$

ed è immediato verificare che $\alpha^{''} = \widetilde{\beta} \circ \widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\varepsilon}^{-1}$ e quindi è isomorfismo.

□

Osserviamo che perché il teorema sia vero devono esistere tutti e tre gli omomorfismi α, $\alpha^{'}$ e $\alpha^{''}$; infatti consideriamo il seguente esempio

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2\cdot"] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[rr] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n \mapsto (n,[n])"'] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[rr, "\beta"'] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

β si può definire in modo che la seconda riga sia esatta ma non esiste $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ che fa commutare il diagramma perché altrimenti sarebbe un isomorfismo.

Esercizio 1. Dare controesempi in cui non esistono α' od $\alpha^{''}$.

Dimostrazione. Non si possono dare controesempi perché il fatto è vero. Supponiamo di avere il seguente diagramma commutativo con righe esatte dove α ed $\alpha^{''}$ sono isomorfismi:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\nu"] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\eta"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Allora come nella dimostrazione precedente $\alpha_{|\operatorname{Ker}\varepsilon} : \operatorname{Ker}\varepsilon \to \operatorname{Ker}\beta$ è isomorfismo e definendo $\alpha' = \eta^{-1} \circ \alpha_{|\operatorname{Ker}\varepsilon} \circ \nu$ si ha un isomorfismo che fa commutare il diagramma.

Allo stesso modo se abbiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\eta"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

come prima α,ε e β inducono gli isomorfismi $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\varepsilon}$ e $\widetilde{\beta}$ e l'omomorfismo $\alpha'' = \widetilde{\beta} \circ \widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\varepsilon}^{-1}$ fa commutare il diagramma. □

Il gruppo degli omomorfismi Siano A, B Λ-moduli; allora $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$ è un gruppo abeliano con l'operazione

$$(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a).$$

Ci chiediamo adesso se $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$ è un Λ-modulo con l'operazione

$$(\lambda\varphi)(a) = \lambda(\varphi(a)) = \varphi(\lambda a).$$

Notiamo che

$$\varphi(\lambda_1\lambda_2 a) = \lambda_1\lambda_2\varphi(a) = (\lambda_1\lambda_2\varphi)(a) =$$
$$(\lambda_1(\lambda_2\varphi))(a) = \lambda_1((\lambda_2\varphi)(a)) = (\lambda_2\varphi)(\lambda_1 a) = \varphi(\lambda_2\lambda_1 a).$$

Perciò se Λ è commutativo $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$ è un Λ-modulo con l'operazione ovvia.

Un paio di funtori Siano A, B, C Λ-moduli; possiamo associare ad ogni omomorfismo di moduli $\beta : B \to C$ un omomorfismo di gruppi $\beta_* : \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(A, C)$ definendo $\beta_*(\varphi) = \beta \circ \varphi$. Con queste associazioni valgono le seguenti proprietà (D è un altro Λ-modulo e $\gamma : C \to D$ un omomorfismo di moduli):

(1) $(\gamma \circ \beta)_* = \gamma_* \circ \beta_*$

(2) $\beta = id_B \Rightarrow \beta_* = id_{\operatorname{Hom}(A,B)}$

Si dice che $\operatorname{Hom}(A, \cdot)$ è un *funtore covariante* tra la categoria dei Λ-moduli e quella dei gruppi abeliani.

Ma possiamo anche fare un'altra cosa: a $\beta : B \to C$ associamo l'omomorfismo di gruppi $\beta^* : \operatorname{Hom}(C, A) \to \operatorname{Hom}(B, A)$ definito da $\beta^*(\varphi) = \varphi \circ \beta$. E ancora sono verificate le proprietà:

(1) $(\beta \circ \gamma)^* = \gamma^* \circ \beta^*$

(2) $id^* = id$

Si dice che $\mathrm{Hom}(\cdot, A)$ è un *funtore controvariante* tra la categoria dei Λ-moduli e quella dei gruppi abeliani.

Teorema 2. Λ

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B''$$

Sia A un Λ-modulo allora la succesione di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}(A, B'')$$

è esatta.

Dimostrazione. Osserviamo che $\varepsilon \circ \mu = 0 \Rightarrow \varepsilon_* \circ \mu_* = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, \mu_* \subseteq \mathrm{Ker}\, \varepsilon_*$, vediamo che $\mathrm{Ker}\, \varepsilon_* \subseteq \mathrm{Im}\, \mu_*$. Sia $\varphi \in \mathrm{Ker}\, \varepsilon_*$ allora $\varepsilon \circ \varphi = 0$ cioè per ogni $a \in A$ $\varepsilon(\varphi(a)) = 0$ e quindi $\varphi(a) \in \mathrm{Im}\, \mu$; ma μ è iniettiva e quindi esiste un unico $b \in B'$ tale che $\mu(b) = \varphi(a)$ ed è ben definita $\vartheta : A \to B'$ con $\vartheta(a) = b$; è immediato verificare che ϑ è omomorfismo e $\mu^*(\vartheta) = \varphi$.

Veniamo all'iniettività di μ^*. Sia $\varphi : A \to B'$ tale che $\mu \circ \varphi = \mu_*(\varphi) = 0$, allora $\mathrm{Im}\, \varphi \subseteq \mathrm{Ker}\, \mu = (0) \Rightarrow \varphi = 0$. □

Teorema 3. Λ

$$B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \longrightarrow 0$$

Allora la succesione di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(B'', A) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(B, A) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}(B', A)$$

è esatta.

Dimostrazione. Mostriamo che ε^* è iniettiva; sia $\varphi : B'' \to A$ tale che $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon^*(\varphi) = 0$, allora $B'' = \mathrm{Im}\, \varepsilon \subseteq \mathrm{Ker}\, \varphi \Rightarrow \varphi = 0$.

Come sempre $\varepsilon \circ \mu = 0 \Rightarrow \mu^* \circ \varepsilon^* = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, \varepsilon^* \subseteq \mathrm{Ker}\, \mu^*$. Sia $\varphi \in \mathrm{Ker}\, \mu^*$, $\varphi \circ \mu = \mu^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, \mu = \mathrm{Ker}\, \varepsilon \subseteq \mathrm{Ker}\, \varphi$ e quindi è ben definito l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} &: B'' \to A \\ \varepsilon(b) &\mapsto \varphi(b). \end{aligned}$$

Infatti se $\varepsilon(b_1) = \varepsilon(b_2)$, allora $b_1 - b_2 \in \mathrm{Ker}\, \varepsilon \subseteq \mathrm{Ker}\, \varphi \Rightarrow \varphi(b_1) = \varphi(b_2)$ e per definizione $\widetilde{\varphi}$ verifica $\varepsilon^*(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi} \circ \varepsilon = \varphi$. □

Osservazione 1. Se anche fosse

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \longrightarrow 0$$

non potremmo dire che le successioni

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}(A, B'') \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(B'', A) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(B, A) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}(B'', A) \longrightarrow 0$$

siano esatte. Infatti consideriamo il solito controesempio

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu = n\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

allora

$$\varepsilon_* : \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/nZ, \mathbb{Z})}_{=(0)} \to \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{\neq(0)}$$

non è surgettivo. Inoltre se scegliamo A $= \mathbb{Z}/$[redacted] abbiamo $\mu^* : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/$[redacted]$) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/$[redacted]$)$ [redacted] non è surgettiva. (FACILE VERIFICA)

1.1 Moduli proiettivi e moduli liberi

Vogliamo dare delle condizioni per cui la ε_* (o la μ^* nel caso controvariante) sia surgettiva. Vien fuori che nel caso controvariante questa è una proprietà di B'' ed è sufficiente che B'' sia:

Definizione 6. Un modulo P si dice *proiettivo* se

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\vartheta"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ A \arrow[r, "\sigma"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Cioè se per ogni coppia di moduli A, B e omomorfismi $\sigma : A \to B$ surgettivo, $\varphi : P \to B$ esiste $\vartheta : P \to A$ tale che $\sigma \circ \vartheta = \varphi$.

Proposizione 4. Se A è un modulo proiettivo e

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \longrightarrow 0$$

allora

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}(A, B'') \longrightarrow 0$$

è esatta.

Dimostrazione. L'unica cosa da dire è che ε_* è surgettiva; sia $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B'')$ allora esiste $\vartheta : A \to B$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "\vartheta"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ B \arrow[r, "\varepsilon"'] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e quindi $\varphi = \varepsilon \circ \vartheta = \varepsilon_*(\vartheta)$. $\square$

Definizione 7. Sia F un Λ-modulo ed $S \subseteq F$ un sottoinsieme, F si dice *modulo libero su* S se per ogni Λ-modulo A e funzione $\varphi : S \to M$ esiste un unico omomorfismo $\widetilde{\varphi} : F \to A$ tale che $\widetilde{\varphi}_{|S} = \varphi$.

Equivalentemente un Λ-modulo è libero su S se S è un insieme di generatori per F *privo di relazioni*; cioè tale che $\sum_{s\in S} \lambda_s s = 0 \Rightarrow \lambda_s = 0\ \forall s \in S$ (la somma si intende finita), o ancora se per ogni $v \in F$ esiste un unica combinazione lineare finita $\sum_{s\in S} \lambda_s s = v$ o infine se $F \cong \oplus_{s\in S}\Lambda$.

Un Λ-modulo F si dice *libero* se esiste $S \subseteq F$ tale che F è libero su S.

Proposizione 5. Un modulo libero è proiettivo

Dimostrazione. Sia F Λ-modulo libero su $S \subseteq F$ e sia $\sigma : A \to B$ omomorfismo surgettivo e $\varphi : F \to B$ omomorfismo; allora definiamo per ogni $s \in S$ $f(s) \in A$ tale che $\sigma(f(s)) = \varphi(s)$ e sia $\vartheta : F \to B$ tale che $\vartheta_{|S} = f$; ora $\sigma \circ \vartheta - \varphi : F \to C$ è un omomorfismo nullo su S e quindi (sempre per la definizione di modulo libero ma usando l'unicità) è l'omomorfismo nullo. $\square$

Osservazione 2. Se Λ è un anello commutativo è ben definito il *rango* di un modulo libero (cioè la cardinalità, costante, delle sue basi); ma nel caso generico ci sono dei problemi, vediamo un esempio. Sia $V = \oplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ e $\Lambda = \mathrm{End}(V)$, $V \cong \left(\oplus_{i \text{ pari}}\mathbb{R}\right) \oplus \left(\oplus_{i \text{ dispari}}\mathbb{R}\right) \Rightarrow \Lambda = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V \oplus V, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) = \Lambda \oplus \Lambda$. Quindi Λ è ovviamente un Λ-modulo libero ma ha una base costituita da un solo elemento ed
03/03/08 una costituita da due elementi.

Definizione 8. Siano $(A_i)_{i\in I}$ Λ-moduli. Un Λ-modulo M si dice *somma diretta di* $(A_i)_{i\in I}$ e si scrive $M = \oplus_{i\in I} A_i$ se esistono gli omomorfismi $j_i : A_i \to M$ (detti *inclusioni*) tali che per ogni Λ-modulo N ed omomorfismi $\varphi_i : A_i \to N$ esiste un unico omomorfismo $\varphi : M \to N$ tale che

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "j_i"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ M \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & N \end{tikzcd} .$$

È facile vedere che la somma diretta, se esiste, è unica a meno di isomorfismo.

Proposizione 6. Siano $(A_i)_{i\in I}$ Λ-moduli; allora

$$\oplus_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} : a_i \in A_i \text{ e } a_i = 0 \text{ eccetto che per un numero finito di indici}\}$$

con le inclusioni ovvie.

Dimostrazione. Basta verificare che la definizione data soddisfa la proprietà universale. Sia N un Λ-modulo e $\varphi_i : A_i \to N$ omomorfismi; definiamo $\varphi : \oplus_{i\in I} A_i \to N$ come $\varphi((a_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \varphi_i(a_i)$ (osserviamo che la somma è ben definita perché gli a_i sono tutti nulli eccetto un numero finito). È ovvio che φ è omorfismo e fa commutare il diagramma. Questa è l'unica scelta possibile, infatti se ψ è un altro omomorfismo che fa commutare il diagramma $\psi((a_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \psi \circ j_i(a_i) = \sum_{i\in I} \varphi_i(a_i) = \varphi((a_i)_{i\in I})$. $\square$

Definizione 9. Siano $(A_i)_{i\in I}$ Λ-moduli. Un Λ-modulo M si dice *prodotto diretto di* $(A_i)_{i\in I}$ e si scrive $M = \prod_{i\in I} A_i$ se esistono gli omomorfismi $\pi_i : M \to A_i$ detti *proiezioni* tali che per ogni Λ-modulo N ed omomorfismi $\varphi_i : N \to A_i$ esiste unico $\varphi : N \to M$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \\
N \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & M \arrow[u, "\pi_i"']
\end{tikzcd}$$

Come prima (e come sempre) se esiste il prodotto diretto è unico a meno di isomorfismo. Inoltre

Proposizione 7. Siano $(A_i)_{i\in I}$ Λ-moduli; allora

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I}\}$$

con le proiezioni $\pi_k((a_i)_{i\in I}) = a_k$.

Dimostrazione. Siano N e $(\varphi_i)_{i\in I}$ come nella proprietà universale del prodotto. Definiamo $\varphi : N \to \prod_{i\in I} A_i$ come $\varphi(n) = (\varphi_i(n))_{i\in I}$; anche qui è ovvio che φ è omomorfismo e fa commutare il diagramma. Sia $\psi : N \to \prod_{i\in I} A_i$ un altro omomorfismo che fa commutare il diagramma, allora se $\psi(n) = (b_i)_{i\in I}$ per ogni $j \in I$ $b_j = \pi_j \circ \psi(n) = \varphi_j(n)$ da cui $\psi(n) = \varphi(n)$. $\square$

Proposizione 8. $A = \oplus_{i\in I} A_i$ è un Λ-modulo proiettivo se e solo se A_i è Λ-modulo proiettivo per ogni $i \in I$.

Dimostrazione. Supponiamo che ogni A_i sia proiettivo allora

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[d, "j_i"] \arrow[ddl, dashed, "\vartheta_i"'] & \\
 & A \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "\vartheta"] & \\
B \arrow[r, "\sigma"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

dove i ϑ_i esistono perché gli A_i sono proiettivi e ϑ esiste per la proprietà universale della somma. Per verificare che il diagramma commuta usiamo ancora la proprietà universale della somma, infatti abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "\varphi\circ j_i"] \arrow[dr, "j_i"'] & & C \\
 & A \arrow[ur, bend left, "\varphi"] \arrow[ur, bend right, "\sigma\circ\vartheta"'] &
\end{tikzcd}$$

e per unicità $\varphi = \sigma \circ \vartheta$.

Viceversa supponiamo che A sia un modulo proiettivo; e sia

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[d, "\varphi_i"] & \\
B \arrow[r, "\sigma"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Allora per le proprietà della somma diretta φ_i si estende a $\varphi : A \to C$ nulla fuori da A_i (cioè tale che per ogni $k \neq i$ $\varphi \circ j_k = 0$). Ma A è proiettivo e quindi esiste $\vartheta : A \to B$ tale che $\sigma \circ \vartheta = \varphi$ e basta scegliere $\vartheta_i = \vartheta \circ j_i$, infatti $\sigma \circ \vartheta_i = \varphi \circ j_i = \varphi_i$. $\square$

Teorema 9. Λ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mu"] & B \arrow[r, shift left, "\varepsilon"] & C \arrow[l, shift left, bend left, "\sigma"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove $\sigma : C \to B$ è un inversa destra di ε, cioè $\varepsilon \circ \sigma = id_C$. Allora la successione *spezza*, cioè $B \cong A \oplus C$ e

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "id"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\vartheta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mu"'] & B \arrow[r, "\varepsilon"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con ϑ isomorfismo.

Dimostrazione. Definiamo $\vartheta(a,c) = \mu(a) + \sigma(c)$. Il diagramma commuta; infatti $\vartheta \circ i_A(a) = \vartheta(a,0) = \mu(a)$ e $\varepsilon \circ \vartheta(a,c) = \varepsilon \circ \mu(a) + \varepsilon \circ \sigma(c) = c = \pi(a,c)$; inoltre ϑ è isomorfismo per il teorema 1 $\square$

Teorema 10. Λ

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mu"] & B \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dove $\gamma : B \to A$ è un inversa sinistra di μ, cioè $\gamma \circ \mu = id_A$. Allora la successione *spezza*, cioè $B \cong A \oplus C$ e

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "id"'] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\vartheta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con ϑ isomorfismo.

Dimostrazione. Come prima è sufficiente definire $\vartheta : B \to A \oplus C$ in modo che il diagramma commuti. Dunque poniamo $\vartheta(b) = (\gamma(b), \varepsilon(b))$ ed abbiamo che $\vartheta \circ \mu(a) = (\mu \circ \gamma(a), \varepsilon \circ \mu(a)) = (a, 0) = i_A(a)$ e $\pi \circ \vartheta(b) = \pi(\gamma(b), \varepsilon(b)) = \varepsilon(b)$; cioè il diagramma commuta. $\square$

[redacted]

Teorema 11. Sia P un Λ-modulo; allora le seguenti sono equivalenti

(1) P è proiettivo.

(2) Per ogni successione esatta corta

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

la successione

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, C) \to 0$$

è esatta.

(3) Se $\varepsilon : B \to P \to 0$ esiste $\sigma : P \to B$ inversa destra di ε, cioè tale che $\varepsilon \circ \sigma = id_P$.

(4) P è addendo diretto di ogni modulo di cui è quoziente.

(5) P è addendo diretto di un modulo libero.

Dimostrazione. ((1) $\Rightarrow$ (2)) Già visto.

((2) $\Rightarrow$ (3)) Consideriamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\varepsilon \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\varepsilon} P \longrightarrow 0$$

allora la successione

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(P, \operatorname{Ker}\varepsilon) \xrightarrow{i_*} \operatorname{Hom}(P, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \operatorname{Hom}(P, P) \longrightarrow 0$$

è esatta ed in particolare esiste $\sigma \in \operatorname{Hom}(P, B)$ tale che $id_P = \varepsilon_*(\sigma) = \varepsilon \circ \sigma$.

((3) $\Rightarrow$ (4)) Sia $P \cong A/B$; consideriamo

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0\,.$$

Allora esiste $\sigma : P \to A$ inversa a destra di π e la successione spezza; da cui $A \cong P \oplus B$.

((4) $\Rightarrow$ (5)) Ogni modulo è quoziente di un modulo libero.

((5) $\Rightarrow$ (1)) P è addendo diretto di un modulo libero che in particolare è proiettivo e il risultato segue dalla proposizione 8. $\square$

Esempio 2. (1) Gli spazi vettoriali sono liberi e proiettivi.

(2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ non è libero (perché ha torsione) ma neanche proiettivo perché altrimenti la successione

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu = n\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

spezzerebbe.

(3) Un gruppo abeliano finitamente generato come $\mathbb{Z}$-modulo è proiettivo se e solo se è isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ (perché altrimenti per il teorema di struttura avrebbe un fattore diretto isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ che non è proiettivo) se e solo se è libero, se e solo se non ha torsione.

(4) Consideriamo la successione di $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-moduli

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Se $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ fosse proiettivo come $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-modulo avremmo che $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ che non è ([redacted]). In particolare $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *non* è libero come $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-modulo.

(5) Sia $\Lambda = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ allora $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ moduli (mediante $([a],[b]) \mapsto [4a+3b]$). $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ è un $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$-modulo libero e quindi proiettivo da cui $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sono $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$-moduli proiettivi ma non liberi.

Esercizio 2. (1) Studiare in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ i sottomoduli (rispettivamente come $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-moduli e $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-moduli) e dire se sono o non sono proiettivi.

(2) Mostrare che $\mathbb{Q}$ *non* è un $\mathbb{Z}$-modulo libero.

Dimostrazione. (1) In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gli unici sottomoduli non banali sono $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, inoltre $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ quindi entrambi i sottomoduli sono proiettivi. In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'unico sottomodulo non banale è $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e questo *non* è proiettivo perché se lo fosse allora sarebbe un fattore diretto di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e per questioni di ordine dovrebbe essere $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ che è assurdo.

(2) Due qualunque elementi di $\mathbb{Q}$ hanno una relazione. Infatti siano $a = \frac{p_1}{q_1}, b = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ (con $(p_i, q_i) = 1$) allora $q_1 p_2 a - q_2 p_1 b = 0$. Perciò se $\mathbb{Q}$ fosse libero avrebbe rango 1 ma $\mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Z}$.

$\square$

1.1.1 Moduli proiettivi su domini ad ideali principali

Teorema 12. Sia R un dominio ad ideali principali ed E un R-modulo libero; $F \subseteq E$ sottomodulo. Allora F è libero.

Più precisamente se $\{v_i\}_{i \in I}$ è una base di E ed $F \neq (0)$ allora esiste una base di F indicizzata da un sottoinsieme di I (in particolare se $\operatorname{rk} E < \infty$ allora $\operatorname{rk} F \leq \operatorname{rk} E$).

Dimostrazione. (Caso finitamente generato) Sia $\{v_i\}_{i \in I}$ una base di E con $I = \{1, \ldots, n\}$. Definiamo $F_i = F \cap (v_1, v_2, \ldots, v_i)$.

$$(0) \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n = F.$$

Mostriamo per induzione su $\operatorname{rk} E$ che F è libero. Se $\operatorname{rk} E = 1$ allora $F = (0)$ oppure F è (isomorfo ad) un ideale di R; ma R è ad ideali principali e quindi $F = (a)$ con $a \in R$ è libero su di un elemento.

Vediamo il passo induttivo. Per ipotesi induttiva i sottomoduli di $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ sono liberi; in particolare F_{n-1} è libero. Se $F_n = F_{n-1}$ è libero. Se $F_{n-1} \subsetneq F_n$ per ogni $x \in F$ esiste α_x tale che

$$x = a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1} + \alpha_x v_n$$

(perchè $v_1, \ldots, v_n$ generano E). Ma α_x è anche unico perché E è libero. Quindi $J = \{\alpha_x : x \in F\} \subseteq R$ è un ideale (perché $\alpha_x + \alpha_y = \alpha_{x+y} \in J$ e $\lambda\alpha_x = \alpha_{\lambda x}$). Allora $J = (b)$ ed esiste $w \in F$ tale che $w = a_1v_1 + \cdots a_{n-1}v_{n-1} + bv_n$.

Sia $f \in F$; allora $f = a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1} + \alpha_f v_n$ ed esiste $c \in R$ tale che $f - cw \in F_{n-1}$ per qualche c. Quindi $F \cong F_{n-1} \oplus Rw$ ed è libero.

(Caso generale) Per ogni $J \subseteq I$ definiamo $F_J = F \cap (v_j)_{j\in J}$ e consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(F_J, w) : J \subseteq I, w : J' \to F_J \text{ con } J' \subseteq J \text{ e } w(J') \text{ è una base di } F_J\}.$$

Per il caso precedente Σ è non vuoto (esiste un $J \subseteq I$ finito tale che $F_J \neq (0)$). Inoltre Σ è parzialmente ordinato con la relazione

$$(F_J, w) \prec (F_K, u) \Leftrightarrow J \subseteq K, J' \subseteq K' \text{ e } u_{|J'} = w.$$

Inoltre $(\Sigma, \prec)$ verifica le condizioni del lemma di Zorn; sia $(F_{J_\alpha}, w_\alpha)_{\alpha\in A}$ una catena e consideriamo (F_J, w) con $J = \cup_{\alpha\in A} J_\alpha$, $J' = \cup_{\alpha\in A} J'_\alpha$ e $w : J' \to F$ definita da $w(j) = w_\alpha(j)$ (dove $j \in J'_\alpha$); vediamo che $w(J')$ è base. Sia $x \in F_J$ allora $x \in F_{J_n}$ per qualche n e quindi $x \in (w_\alpha(J'_\alpha)) \subseteq (w(J'))$ e $w(J')$ è un sistema di generatori.

Sia $\sum_{j\in J'} a_j w(j) = 0$ dove la combinazione lineare è finita; allora $\{j \in J' : a_j \neq 0\} \subseteq J'_\alpha$ per qualche $\alpha \in A$ e quindi dal fatto che $w(J'_\alpha) = w_\alpha(J'_\alpha)$ è base di F_{J_α} abbiamo che $a_j = 0$ per ogni $j \in J'$.

Sia dunque (F_J, w) un elemento massimale e supponiamo che $J \neq I$; allora esiste $k \in I \backslash J$ e ogni elemento di $F_{J\cup\{k\}}$ si scrive come

$$x = \sum_{j\in J'} a_j v_k + \alpha_x v_k$$

e $(a_j)_{j\in J'}$ è a supporto finito, inoltre come prima tale scrittura è unica ed $S = \{\alpha_x : x \in F_{J\cup\{k\}}\} \subseteq R$ è un ideale; allora $S = (b)$ ed esiste $v \in F_{J\cup\{k\}}$ tale che $\alpha_v = b$. Sempre come prima $F_{J\cup\{k\}} \cong F_j \oplus Rv$ e in particolare definendo $\widetilde{w} : J' \cup \{k\} \to F_{J\cup\{k\}}$ tale che $\widetilde{w}(j) = w(j)$ se $j \in J'$ e $\widetilde{w}(k) = v$ si ottiene $(F_J, w) \prec (F_{J\cup\{k\}}, \widetilde{w}) \in \Sigma$ che è assurdo. □

Corollario 13. Se Λ è un dominio ad ideali principali, un Λ-modulo proiettivo è libero.

Dimostrazione. P proiettivo $\Rightarrow$ P è addendo diretto di un modulo libero $\Rightarrow$ P è sottomodulo di modulo libero $\Rightarrow$ P è libero. □

Corollario 14. Se Λ è un dominio ad ideali principali ogni sottomodulo di un modulo proiettivo è proiettivo.

Osservazione 4. Sia Λ domino ad ideali principali, M Λ-modulo finitamente generato, $N \subseteq M$ sottomodulo, F Λ-modulo libero tale che M è quoziente di F; allora

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "i"] & M \end{tikzcd}$$

$\pi^{-1}(N)$ è sottomodulo di modulo libero e; in particolare è libero e $\operatorname{rk} \pi^{-1}(N) \leq \operatorname{rk} M < \infty$, cioè $\pi^{-1}(N)$ è finitamente generato e quindi lo è anche N; in altre parole *se Λ è domino ad ideali principali ogni sottomodulo di un modulo finitamente generato è finitamente generato.*

Osservazione sull'osservazione: questo fatto è vero più in generale per Λ noetheriano.

Esempio 3. $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ non è libero (e quindi neanche proiettivo) come $\mathbb{Z}$-modulo; per una dimostrazione ci si può riferire a [Sch].

Teorema 15 (Dei divisori elementari)**.** Sia R un dominio ad ideali principali; F R-modulo libero, $M \subseteq F$ sottomodulo finitamente generato con $M \neq (0)$. Allora esistono una base $\mathscr{B}$ di F, degli elementi $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{B}$ e degli elementi $a_1, \dots a_n \in R \backslash \{0\}$ tali che

(1) $M = \langle a_1 e_1, \dots, a_n e_n \rangle$ e

(2) $a_i \mid a_{i+1}$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che F sia finitamente generato, altrimenti scriviamo i generatori di M come combinazione lineare di elementi di $\mathscr{B}$ e consideriamo il sottomodulo generato dagli elementi di $\mathscr{B}$ che compaiono in tali scritture (che sono in numero finito).

Sia $\lambda \in \operatorname{Hom}_R(F, R)$ e definiamo $J_\lambda = \lambda(M)$, chiaramente ogni J_λ è un ideale. La famiglia di ideali di R

$$\mathscr{F} = \{J_\lambda : \lambda \in \operatorname{Hom}_R(F, R)\}$$

ammette elementi massimali (perché è non vuota ed R è noetheriano). Sia J_{λ_1} massimale in $\mathscr{F}$, R è PID e quindi $J_{\lambda_1} = (a_1)$ ed $a_1 \neq 0$ (perché, scelto $m \in M$ con $m \neq 0$, è semplice costruire un funzionale non nullo su m).

Sia $x_1 \in M$ tale che $\lambda_1(x_1) = a_1$; per ogni $\lambda \in \operatorname{Hom}_R(F, R)$ si ha $\lambda(x_1) \in (a_1)$. Infatti sia $(d) = (\lambda(x_1), a_1)$ ($\Rightarrow$ $(a_1) \subseteq (d)$), $d = h\lambda(x_1) + k\lambda_1(x_1)$ e $\mu = h\lambda + k\lambda_1 \in \operatorname{Hom}_R(F, R)$. $J_{\lambda_1} = (a_1) \subseteq (d) \subseteq J_\mu$ (dove l'ultima inclusione viene da $d = \mu(x_1)$) e quindi per massimalità $(a_1) = (d) = J_\mu$ e, a meno di associati, $a_1 = d \mid \lambda(x_1)$.

Perciò se scriviamo x_1 in termini di una qualunque base di F e consideriamo come funzionale la proiezione su di una coordinata abbiamo che ogni coefficiente di x_1 è multiplo di a_1 ed $x_1 = a_1 e_1$. Inoltre $\lambda_1(e_1) = 1$. Vogliamo quindi dimostrare che $F = \langle e_1 \rangle \oplus \operatorname{Ker} \lambda_1$, è chiaro che $\langle e_1 \rangle \cap \operatorname{Ker} \lambda_1 = (0)$. Sia $x \in F$, allora $x - \lambda_1(x) e_1 \in \operatorname{Ker} \lambda_1 \Rightarrow F = \langle e_1 \rangle \oplus \operatorname{Ker} \lambda_1$. $F_1 := \operatorname{Ker} \lambda_1$ è libero per il teorema 12; chiamiamo $M_1 = F_1 \cap M$, allora $M = \langle x_1 \rangle \oplus M_1$. Infatti chiaramente $\langle x_1 \rangle \cap M_1 = (0)$ e per ogni $x \in M$ $\lambda_1(x) = b a_1$ e $x - b x_1 \in M_1$.

Adesso si completa la dimostrazione con un procedimento induttivo e per avere il secondo punto basta osservare che per ogni funzionale $\lambda \in \operatorname{Hom}_R(F_1, R)$ $\lambda(M_1) \subseteq \lambda_1(M)$. Infatti estendiamo λ ad un funzionale $F \to R$ con $\lambda(e_1) = 0$ e consideriamo il funzionale $\mu = \lambda + \lambda_1$. Allora $\mu(x_1) = a_1 \Rightarrow (a_1) \subseteq J_\mu$ e per massimalità $J_\mu = (a_1)$. Infine per ogni $m \in M_1$ $\lambda(m) = \mu(m) - \lambda_1(m) \in (a_1)$. □

1.2 Moduli iniettivi

04/03/08

Definizione 10. Un Λ-modulo I si dice *iniettivo* se comunque dati A, B Λ-moduli, $\alpha : A \to I$ omomorfismo e $\gamma : A \to B$ omomorfismo iniettivo esiste $\beta : B \to I$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& I & \\
B \arrow[ur, dashed, "\beta"] & A \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

In parole povere un modulo I è iniettivo se (identificando tramite γ A come sottomodulo di B), per ogni $A \subseteq B$ moduli ogni omomorfismo $\alpha : A \to I$ si estende ad un omomorfismo $\beta : B \to I$.

Proposizione 16. Un prodotto $\prod_{i \in I} A_i$ è iniettivo se e solo se ogni A_i è iniettivo.

Dimostrazione. Supponiamo che ogni A_i sia iniettivo; allora

$$\begin{tikzcd}
& A_i & \\
& \prod_{i \in I} A_i \arrow[u, "\pi_i"'] & \\
B \arrow[uur, dashed, "\beta_i"] \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & A \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Dove i β_i esistono perché A_i è iniettivo e β esiste per la proprietà universale del prodotto. Per verificare che il diagramma commuta osserviamo che $\beta_i \circ \gamma = \pi_i \circ \alpha$ per ogni $i \in I$ (per costruzione) e per proprietà universale del prodotto $\pi_i \circ \beta = \beta_i$ per ogni $i \in I$. Quindi il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\beta_i \circ \gamma"] \arrow[dr, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\beta\circ\gamma"'] & & A_i \\
& \prod_{i\in I} A_i \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

e per unicità $\beta \circ \gamma = \alpha$.

Viceversa sia $\prod_{i\in I} A_i$ iniettivo e consideriamo $\alpha : A \to A_k$ e $\gamma : A \hookrightarrow B$; se definiamo la famiglia di omomorfismi $\alpha_i : A \to A_i$ come $\alpha_i = 0$ se $i \neq k$ e $\alpha_k = \alpha$. Per la proprietà universale del prodotto esiste $\widetilde{\alpha} : A \to \prod_{i\in I} A$ tale che $\pi_i \circ \widetilde{\alpha} = \alpha_i$ e quindi

$$\begin{tikzcd}
& A_i & \\
& \prod_{i\in I} A_i \arrow[u, "\pi_i"'] & \\
B \arrow[uur, dashed, "\beta_i"] \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & A \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\widetilde{\alpha}"'] \arrow[uu, bend right=60, "\alpha_i"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

dove β esiste perché $\prod_{i\in I} A_i$ è iniettivo e $\beta_i = \pi_i \circ \beta$. $\square$

Proposizione 17. Sia B un Λ-modulo ed $\{A_i\}_{i\in J}$ una famiglia di Λ-moduli; allora esiste un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\oplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_\Lambda(A_i, B)$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $\mathrm{Hom}_\Lambda(\oplus_{i\in I} A_i, B)$ soddisfa la proprietà universale del prodotto. Per ogni $i \in I$ chiamiamo j_i l'inclusione $A_i \to \oplus_{i\in I} A_i$ e definiamo le proiezioni $\pi_i : \mathrm{Hom}_\Lambda(\oplus_{i\in I} A_i, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_i, B)$ come $\pi_i(\varphi) = \varphi \circ j_i$.

Consideriamo una famiglia di omomorfismi $\beta_i : N \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_i, B)$ per ogni $n \in N$ esiste un unico omomorfismo $\beta(n)$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "\beta_i(n)"] \arrow[dr, "j_i"'] & & B \\
& \oplus_{i\in I} A_i \arrow[ur, dashed, "\beta(n)"'] &
\end{tikzcd}$$

Definiamo $\beta : N \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\oplus_{i\in I} A_i, B)$ come $n \mapsto \beta(n)$. β è omomorfismo, infatti per ogni $n_1, n_2 \in N$ e per ogni $i \in I$ $(\beta(n_1) + \beta(n_2)) \circ j_i = \beta(n_1) \circ j_i + \beta(n_2) \circ j_i = \beta_i(n_1) + \beta_i(n_2) = \beta_i(n_1 + n_2)$ e per unicità $\beta(n_1) + \beta(n_2) = \beta(n_1 + n_2)$. Inoltre per ogni $n \in N$ $\pi_i(\beta(n)) = \beta(n) \circ j_i = \beta_i(n)$ e quindi β risolve il problema universale. □

In particolare $(\oplus_{i=0}^{\infty}\mathbb{R})^* \cong \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}$ che è come dire che $(\mathbb{R}[x])^* \cong \mathbb{R}[[x]]$.

1.2.1 Moduli iniettivi su domini ad ideali principali

Definizione 11. Sia Λ un dominio; un Λ-modulo D si dice *divisibile* se $\forall d \in D\, \forall \lambda \in \Lambda\backslash\{0\}\, \exists c \in D$ tale che $\lambda c = d$.

Esempio 4. (1) $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo divisibile

(2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo divisibile ma c *non* è unico: $0 = \frac{1}{4}4 = \frac{1}{2}4$.

(3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo *non* divisibile (ad esempio $n = 4, d = 1, \lambda = 2$).

(4) $\mathbb{Z}$ non è uno $\mathbb{Z}$-modulo divisibile.

(5) Un gruppo abeliano finitamente generato non è mai divisibile.

Teorema 18. Sia Λ un dominio d'integrità; allora un Λ-modulo iniettivo è divisibile. Se Λ è un dominio ad ideali principali un Λ-modulo divisibile è iniettivo.

Dimostrazione. Sia Λ dominio di integrità e D Λ-modulo iniettivo. Sia $d \in D$ e $\lambda \in \Lambda$ con $\lambda \neq 0$, vogliamo trovare $c \in D$ tale che $\lambda c = d$. Consideriamo

$$\begin{tikzcd} & D & \\ \Lambda \arrow[ur, dashed, "\vartheta"] & \Lambda \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\varepsilon"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

con $\mu(1) = \lambda$ (è iniettivo perché Λ è un dominio) e $\varepsilon(1) = d$. Per iniettività esiste $\vartheta : \Lambda \to D$ che fa commutare il diagramma; in particolare $d = \varepsilon(1) = \vartheta \circ \mu(1) = \vartheta(\lambda) = \lambda\vartheta(1)$.

Adesso sia Λ un dominio ad ideali principali e D un Λ-modulo divisibile. Consideriamo

$$\begin{tikzcd} & D & \\ B & A \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

A meno di identificare A con $\mu(A)$ possiamo supporre $A \subseteq B$. Sia

$$\Sigma = \{(L, \gamma) : A \subseteq L \subseteq B \text{ e } \gamma : L \to D,\ \gamma_{|A} = \alpha\}.$$

$(A, \alpha) \in \Sigma \Rightarrow \Sigma \neq \emptyset$. Σ è parzialmente ordinato con la relazione

$$(L, \gamma) \prec (M, \eta) \Leftrightarrow L \subseteq M, \text{ e } \eta_{|L} = \gamma$$

$(\Sigma, \prec)$ verifica le condizioni del lemma di Zorn: sia $(\overline{A}, \overline{\alpha}) \in \Sigma$ un elemento massimale. Se $\overline{A} \neq B$ esiste $b \in B \setminus \overline{A}$; sia $I = \{\lambda \in \Lambda : \lambda b \in \overline{A}\}$. I è un ideale di Λ e quindi $I = \langle \lambda_0 \rangle$. Sia $\widetilde{A} = \langle \overline{A}, b \rangle$, vogliamo definire $\widetilde{\alpha} : \widetilde{A} \to D$ che estende α. Se $\lambda_0 \neq 0$ per divisibilità esiste $c \in D$ tale che $\lambda_0 c = \overline{\alpha}(\lambda_0 b)$; se $\lambda_0 = 0$ scegliamo $c \in D$ arbitrario e definiamo

$$\widetilde{\alpha}(\overline{a} + \lambda b) = \overline{\alpha}(\overline{a}) + \lambda c$$

e l'unica cosa da verificare è $\lambda b \in \overline{A} \Rightarrow \widetilde{\alpha}(\lambda b) = \overline{\alpha}(\lambda b)$ ma questo segue dalla definizione; infatti sia $\lambda = \xi \lambda_0$ allora $\overline{\alpha}(\lambda b) = \xi \overline{\alpha}(\lambda_0 b) = \xi \lambda_0 c = \lambda c = \widetilde{\alpha}(\lambda b)$. Perciò $(\overline{A}, \overline{\alpha}) \prec (\widetilde{A}, \widetilde{\alpha})$ che è assurdo. □

Proposizione 19. Quoziente di un modulo divisibile è divisibile.

Dimostrazione. È ovvio. □

Teorema 20. Ogni gruppo abeliano (come $\mathbb{Z}$-modulo) può essere immerso in un gruppo abeliano divisibile (cioè uno $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo).

Dimostrazione. Sia A un gruppo abeliano ed $a \in A$ con $a \neq 0$. Consideriamo $\langle a \rangle \subseteq A$ e la mappa $\alpha_a : \langle a \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ definita nel seguente modo: se $o(a) = \infty$ allora $\alpha_a(a)$ è qualunque elemento non nullo di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; se $o(a) = n$ allora $\alpha_a(a)$ è un elemento con ordine che divide n. Consideriamo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \\
A \arrow[ur, dashed, "\vartheta_a"] & \langle a \rangle \arrow[l] \arrow[u, "\alpha_a"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

dove ϑ_a esiste per l'iniettività di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Adesso consideriamo

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{a \in A} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_a \arrow[d, "\pi_a"] \\
A \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[r, "\vartheta_a"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

dove u esiste per la proprietà universale del prodotto. u è anche iniettiva perché per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ $\pi_a(u(a)) = \vartheta_a(a) \neq 0$ per costruzione. La tesi segue dalla proposizione 16. □

Definizione 12. Un gruppo abeliano si dice *colibero* se è isomorfo ad $\prod_{i\in I}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i$.

Esercizio 3. (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è iniettivo come $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modulo.

(2) Ogni gruppo abeliano A ha un sottogruppo divisibile massimale.

Dimostrazione. (1) Consideriamo l'omomorfismo iniettivo

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ 1 &\mapsto \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \\
 & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[u, "\psi"'] & \\
B \arrow[uur, dashed, "\widetilde{\beta}"] \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & A \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Dove A e B sono $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-moduli, cioè gruppi abeliani di n-torsione e $\psi\circ\alpha$ è omomorfismo di gruppi abeliani. $\widetilde{\beta}$ esiste per l'iniettività di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ e $\operatorname{Im}\widetilde{\beta}$ è un sottogruppo di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ che ha n-torsione $\Rightarrow \operatorname{Im}\widetilde{\beta} \subseteq \langle\frac{1}{n}\rangle$ e se chiamiamo $\psi^{-1} : \langle\frac{1}{n}\rangle \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ basta porre $\beta = \psi^{-1}\circ\widetilde{\beta}$.

(2) Mostriamo che somma diretta di moduli divisibili è divisibile. Sia $A = \oplus_{i\in I}A_i$, $(a_i)_{i\in I} \in A$ e $\lambda \in \Lambda\backslash\{0\}$ definiamo $c = (c_i)_{i\in I}$ come

$$c_i = \begin{cases} 0 \text{ se } a_i = 0 \\ d \in A_i : \lambda d = a_i \text{ altrimenti} \end{cases}$$

c ha supporto finito e quindi $c \in A$ e $\lambda c = a$.

Sia ora A un gruppo abeliano e consideriamo la famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ dei suoi sottogruppi divisibili. Per ogni $i \in I$ consideriamo l'inclusione $\varphi_i : A_i \to A$, queste inducono un'omomorfismo $\varphi : \oplus_{i\in I}A_i \to A$. Ora $\oplus_{i\in I}A_i$ è divisibile e quindi lo è anche $B = \operatorname{Im}\varphi \subseteq A$ (che è un quoziente di $\oplus_{i\in I}A_i$), inoltre per ogni sottogruppo divisibile $A_i \subseteq A$ abbiamo $A_i = \varphi_i(A_i) = \varphi\circ j_i(A_i) \subseteq B$. Quindi B è il massimo sottogruppo divisibile di A.

□

1.2.2 Moduli coliberi

Sia A un Λ-modulo *destro* e G un gruppo abeliano; consideriamo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ (omomorfismi di gruppi abeliani). Vogliamo mettere su quest'ultimo una struttura di Λ-modulo *sinistro.* Perciò se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ definiamo $\lambda\varphi(a) = \varphi(a\lambda)$.

Esercizio 4. Verificare che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ con la moltiplicazione per scalare così definita è veramente un Λ-modulo sinistro.

Dimostrazione. È tutto ovvio ad eccezione di $(\lambda_1\lambda_2)\varphi = \lambda_1(\lambda_2\varphi)$, ma per ogni $a \in A$ $(\lambda_1\lambda_2)\varphi(a) = \varphi(a(\lambda_1\lambda_2)) = \varphi((a\lambda_1)\lambda_2) = (\lambda_2\varphi)(a\lambda_1) = \lambda_1(\lambda_2\varphi)(a)$. □

Teorema 21. Sia A un Λ-modulo *sinistro* e G un gruppo abeliano; consideriamo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)$ come Λ-modulo sinistro (Perchè Λ è in modo naturale un Λ-modulo destro). Allora esiste un *isomorfismo* di gruppi abeliani

$$\eta_A : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G).$$

Inoltre se $\alpha : A \to B$ è omomorfismo di Λ-moduli

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, G) \arrow[d, "\alpha^*"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)) \arrow[r, "\eta_A"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G))$ ed $a \in A$, definiamo $\eta_A(\varphi)(a) = \varphi(a)(1)$. Dobbiamo fare un paio di verifiche:

(1) $\eta_A(\varphi)(a) \in$ *Hom*$_{\mathbb{Z}}(A, G)$: $\eta_A(\varphi)(a_1 + a_2) = \varphi(a_1 + a_2)(1) = \varphi(a_1)(1) + \varphi(a_2)(1) = \eta_A(\varphi)(a_1) + \eta_A(\varphi)(a_2)$ e anche $\eta_A(\varphi)(ka) = \varphi(ka)(1) = k\varphi(a)(1) = k\eta_A(\varphi)(a)$.

(2) η_A *è un omomorfismo di gruppi abeliani*: $\eta_A(\varphi_1+\varphi_2)(a) = (\varphi_1+\varphi_2)(a)(1) = (\varphi_1(a) + \varphi_2(a))(1) = \varphi_1(a)(1) + \varphi_2(a)(1) = \eta_A(\varphi_1)(a) + \eta_A(\varphi_2)(a)$.

Per vedere che η_A è un isomorfismo costruiamo un'inversa $\xi_A : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G))$ definendo $\xi_A(\psi)(a)(\lambda) = \psi(\lambda a)$. Anche qui dobbiamo fare un po' di verifiche noiose

(1) $\xi_A(\psi)(a) \in$ *Hom*$_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)$*, cioè è un omomorfismo di gruppi abeliani*: $\xi_A(\psi)(a)(\lambda_1 + \lambda_2) = \psi((\lambda_1 + \lambda_2)a) = \psi(\lambda_1 a + \lambda_2 a) = \psi(\lambda_1 a) + \psi(\lambda_2 a) = \xi_A(\psi)(a)(\lambda_1) + \xi_A(\psi)(a)(\lambda_2)$.

(2) $\xi_A(\psi) \in Hom_\Lambda(A, Hom_\mathbb{Z}(\Lambda, G))$: $\xi_A(\psi)(a_1 + a_2)(\lambda) = \psi(\lambda(a_1 + a_2)) = \psi(\lambda a_1 + \lambda a_2) = \psi(\lambda a_1) + \psi(\lambda a_2) = \xi_A(\psi)(a_1)(\lambda) + \xi_A(\psi)(a_2)(\lambda)$ e anche $\xi_A(\psi)(\lambda_1 a)(\lambda) = \psi(\lambda\lambda_1 a) = \xi_A(\psi)(a)(\lambda\lambda_1) = \lambda_1\xi_A(\psi)(a)(\lambda)$.

(3) ξ_A *è un omomorfismo di gruppi abeliani*: $\xi_A(\psi_1 + \psi_2)(a)(\lambda) = (\psi_1 + \psi_2)(\lambda a) = \psi_1(\lambda a) + \psi_2(\lambda a) = \xi_A(\psi_1)(a)(\lambda) + \xi_A(\psi_2)(a)(\lambda)$.

Finalmente possiamo vedere che η_A e ξ_A sono l'una inversa dell'altra. $\xi_A \circ \eta_A(\varphi)(a)(\lambda) = \eta_A(\varphi)(\lambda a) = \varphi(\lambda a)(1) = \lambda\varphi(a)(1) = \varphi(a)(\lambda)$, cioè $\xi_1 \circ \eta_A = id$. Inoltre $\eta_A \circ \xi_A(\varphi)(a) = \xi_A(\varphi)(a)(1) = \varphi(a)$ e $\eta_A \circ \xi_A = id$.

E, dulcis in fundo, η_A è naturale: $(\eta_A \circ \alpha^*)(\varphi)(a) = \alpha^*(\varphi)(a)(1) = (\varphi \circ \alpha)(a)(1)$ e $(\alpha^* \circ \eta_B)(\varphi)(a) = (\eta_B(\varphi) \circ \alpha)(a) = \varphi(\alpha(a))(1) = (\varphi \circ \alpha)(a)(1)$. □

Osservazione 5. η è un esempio di *trasformazione naturale tra funtori*; cioè se $\mathfrak{C}$ ed $\mathfrak{D}$ sono categorie ed $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ sono funtori, una trasformazione naturale tra F e G è data da un morfismo $\eta_C : F(C) \to G(C)$ per ogni $C \in \mathfrak{C}$, in modo che per ogni $C, D \in \mathfrak{C}$ e morfismo $\alpha : C \to D$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & G(C) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ F(D) \arrow[r, "\eta_D"] & G(D) \end{tikzcd}$$

Definizione 13. Un Λ-modulo si dice *colibero* se è (isomorfo a) $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

Osservazione 6. Se $\Lambda = \mathbb{Z}$ abbiamo che $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (tramite $\varphi \mapsto \varphi(1)$) e quindi questa definizione è coerente con quella data per i gruppi abeliani.

Teorema 22. Ogni Λ-modulo sinistro A può essere immerso in un modulo colibero.

Dimostrazione. A è un gruppo abeliano e quindi sappiamo (perché lo abbiamo visto nella dimostrazione del teorema 20) che per ogni $a \in A$ esiste $\vartheta_a : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ omomorfismo di gruppi abeliani tale che $\vartheta_a(a) \neq 0$ se $a \neq 0$; in particolare $\vartheta_a \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ e quindi posso considerare (teorema 21) $\varphi_a = \eta_A^{-1}(\vartheta_a) : A \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, inoltre se $a \neq 0$ $\varphi_a(a)(1) = \eta_A^{-1}(\vartheta_a)(a)(1) = \vartheta_a(a) \neq 0$ cioè $\varphi_a(a) \neq 0$. E adesso

$$\begin{tikzcd} & \prod_{a \in A}(\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))_a \arrow[d, "\pi_a"] \\ A \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi_a"'] & \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

e φ è iniettiva perché $a \neq 0 \Rightarrow \pi_a(\varphi(a)) = \varphi_a(a) \neq 0 \Rightarrow \varphi(a) \neq 0$. □

10/03/08

Teorema 23. Un Λ-modulo colibero è iniettivo.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ è iniettivo. Sia

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \\
B & A \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

dobbiamo dimostrare che esiste $\beta : B \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ che fa commutare il diagramma. Ma applicando la trasformazione naturale η_A e usando il fatto che $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è iniettivo sappiamo che

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \\
B \arrow[ur, dashed, "\delta"] & A \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "\eta_A(\alpha)"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

dove gli omomorfismi sono di gruppi abeliani. E quindi possiamo definire $\beta = \eta_B^{-1}(\delta) : B \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ che è un omomorfismo di Λ-moduli.

Resta da vedere che β fa commutare il diagramma; per definizione $\delta = \eta_B(\beta)$ e usando la naturalità di η abbiamo $\eta_A(\alpha) = \sigma^*(\delta) = \sigma^* \circ \eta_B(\beta) = \eta_A \circ \sigma^*(\beta)$ e poi dall'iniettività di η_A: $\alpha =$ [redacted] $\beta \circ \sigma$. $\square$

Corollario 24. Ogni Λ-modulo è sottomodulo di un modulo iniettivo.

Teorema 25. Per un Λ-modulo I le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) I è iniettivo.

(2) Per ogni successione esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$$

la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, I) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(B, I) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}(A, I) \longrightarrow 0$$

è esatta.

(3) Se $\mu : I \to B$ è iniettiva allora esiste $\beta : B \to I$ inversa a sinistra di μ; cioè tale che $\beta \circ \mu = id_I$.

(4) I è addendo diretto di ogni modulo che lo contiene come sottomodulo.

(5) I è addendo diretto di un modulo colibero.

Dimostrazione. ((1) $\Rightarrow$ (2)) L'unica cosa da dimostrare è che μ^* è surgettiva; sia $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, I)$ allora

$$\begin{tikzcd} & I & \\ B \arrow[ur, dashed, "\beta"] & A \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

e quindi $\alpha = \mu^*(\beta)$.

((2) $\Rightarrow$ (3)) Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\pi} \mathrm{coKer}\,\mu \longrightarrow 0$$

allora $\mu^* : \mathrm{Hom}(B, I) \to \mathrm{Hom}(I, I)$ è surgettiva e quindi esiste $\beta \in \mathrm{Hom}(B, I)$ tale che $\mu^*(\beta) = \beta \circ \mu = id_I$.

((3) $\Rightarrow$ (4)) Sia $I \subseteq A$; consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

allora esiste $\beta : A \to I$ tale che $\beta \circ i = id_I$ e per il teorema 10 $A \cong I \oplus A/I$.

((4) $\Rightarrow$ (5)) Ogni modulo si può immergere in un modulo colibero.

((5) $\Rightarrow$ (1)) I è addendo diretto di un modulo colibero che in particolare è iniettivo e per la proposizione 16 è iniettivo. $\square$

Esempio 5.
- Gli spazi vettoriali su un campo K sono iniettivi. Se $W \subseteq V$ è un sottospazio ed $\alpha : W \to L$ è applicazione lineare si può estendere α a $\widetilde{\alpha} : V \to L$.

- Le rappresentazioni di gruppi finiti sono $K[G]$-moduli iniettivi se $\mathrm{char}\, K = 0$ o $\mathrm{char}\, K \nmid o(G)$. Siano $W \subseteq V$ $K[G]$-moduli ed F un supplementare qualsiasi di W in V (F è uno spazio vettoriale ma in generale *non è* un $K[G]$-modulo); consideriamo $\pi_W : V \to W$ proiezione e sia

$$T = \frac{1}{o(G)} \sum_{\gamma \in G} (g\pi_W)$$

dove $g\pi_W : v \mapsto g\pi_W(g^{-1}v)$ (usiamo l'ipotesi su $\mathrm{char}\, K$ per invertire $o(G)$). T è un omomorfismo di $K[G]$-moduli; infatti è K-lineare e per ogni $h \in G, v \in V$

$$T(hv) = \tfrac{1}{o(G)} \textstyle\sum_{g\in G} g\pi_W(g^{-1}hv) = \tfrac{1}{o(G)} \sum_{g\in G} h(h^{-1}g)\pi_W((h^{-1}g)^{-1}v) = \tfrac{1}{o(G)} \sum_{g'\in G} hg'\pi_W(g'^{-1}v) = hT(v).$$

Ora $T_{|W} = id_W$ e $\operatorname{Ker} T \oplus W = V$; infatti se $w \in \operatorname{Ker} T \cap W$ allora $w = T(w) = 0$ e quindi $\operatorname{Ker} T \cap W = (0)$, inoltre per ogni $v \in V$ $v - T(v) \in \operatorname{Ker} T$ da cui $V = \operatorname{Ker} T + W$. Ora $\operatorname{Ker} T$ è un $K[G]$-modulo. Perciò se V è un $K[G]$-modulo (con le ipotesi dette su K) ogni suo sottomodulo ha un addendo diretto e si ragiona come per gli spazi vettoriali.

Capitolo 2

Categorie e Funtori

Per definire una categoria $\mathfrak{C}$ servono tre informazioni:

(1) Una *classe* di oggetti.

(2) Per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathfrak{C}$ un *insieme* di morfismi $\mathfrak{C}(A, B)$ da A a B.

(3) Per ogni $A, B, C \in \mathfrak{C}$ una *legge di composizione*

$$\mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) \to \mathfrak{C}(A, C).$$

Osservazione 7. I morfismi *non* sono necessariamente funzioni. I termini *classe* e *insieme* sono intesi nel senso della teoria degli insiemi. Infatti il primo esempio di categoria è $\mathfrak{S}$ in cui gli oggetti sono gli insiemi e i morfismi le funzioni tra insiemi.

Quando si parla di classe ci si può riferire alla teoria assiomatica di Gödel-Bernays[1] anziché a quella di Zermelo-Frankel in cui gli oggetti sono classi e gli insiemi sono classi che appartengono ad altre classi.

Se in una categoria $\mathfrak{C}$ gli oggetti formano un insieme si parla di *small category*.

A volte si scrive $f : A \to B$ per $f \in \mathfrak{C}(A, B)$. Una categoria è definita dai tre punti precedenti e dai seguenti *assiomi*:

(A1) Se $A_1 \neq A_2$ o $B_1 \neq B_2$ allora $\mathfrak{C}(A_1, B_1) \cap \mathfrak{C}(A_2, B_2) = \emptyset$.

(A2, associatività) Dati $f : A \to B$, $g : B \to C$ ed $h : C \to D$ si ha $h(gf) = (hg)f$.

[1] cfr. [AHS90] e [Ber91]

(A3, unità) Per ogni $A \in \mathfrak{C}$ esiste $1_A : A \to A$ morfismo tale che per ogni $f : A \to B$ e $g : C \to A$

$$1_A g = g, \quad f 1_A = f.$$

Osservazione 8. - Per ogni $A \in \mathfrak{C}$ il morfismo 1_A è univocamente determinato.

- Si può definire il concetto di morfismo invertibile e di oggetti isomorfi.

Definizione 14. Un oggetto *zero* in una categoria $\mathfrak{C}$ è un oggetto tale che per ogni $X \in \mathfrak{C}$ $\mathfrak{C}(0, X)$ ed $\mathfrak{C}(X, 0)$ hanno un solo elemento.

Non tutte le categorie hanno uno zero; ad esempio:

- gli anelli commutativi con unità non hanno zero;
- La categoria $\mathfrak{S}$ degli insiemi non ha zero; gli unici candidati zero sono i singoletti o l'insieme vuoto ($\emptyset$ è l'unico oggetto tale che $\mathfrak{C}(\emptyset, X)$ ha un solo elemento per ogni $X \in \mathfrak{C}$, mentre i singoletti sono gli unici oggetti tali che $\mathfrak{C}(X, \{*\})$ ha un solo elemento per ogni X). Ma $\mathfrak{C}(\{*\}, X)$ ha più di un elemento se X ha più di un elemento e $\mathfrak{C}(X, \emptyset) = \emptyset$ per ogni $X \in \mathfrak{S}$ (con $X \neq \emptyset$).

Osservazione 9. - Gli zeri di una categoria sono isomorfi tra loro.

- Se esiste uno zero allora per ogni $X, Y \in \mathfrak{C}$ esiste un morfismo $0_{X,Y}$ definito da

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "0_{X,Y}"] \arrow[dr] & & Y \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Definizione 15. Siano $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ categorie; $\mathfrak{D}$ è una *sottocategoria* di $\mathfrak{C}$ se

(1) $X \in \mathfrak{D} \Rightarrow X \in \mathfrak{C}$

(2) $\mathfrak{D}(X, Y) \subseteq \mathfrak{C}(X, Y)$

(3) $f \in \mathfrak{D}(X, Y), g \in \mathfrak{D}(Y, Z) \Rightarrow f \circ_{\mathfrak{D}} g = f \circ_{\mathfrak{C}} g$.

Se per ogni $A, B \in \mathfrak{D}$ $\mathfrak{D}(A, B) = \mathfrak{C}(A, B)$ $\mathfrak{D}$ si dice *sottocategoria piena* di $\mathfrak{C}$.

Esempio 6. - $\mathfrak{Ab}$ (gruppi abeliani) è una sottocategoria piena di $\mathfrak{G}$ (gruppi).

- $\mathfrak{R}_1$ (anelli commutativi con unità) è una sottocategoria di $\mathfrak{R}$ (anelli) ma non è una sottocategoria piena.

Alcuni esempi di categorie:

- $\mathfrak{C} = X$ insieme parzialmente ordinato; i morfismi sono le relazioni $a \leq b$. In particolare i morfismi non sono funzioni.

- $\mathfrak{C} = \{G\}$ con G gruppo. $\mathfrak{C}(G, G)$ corrispondono alle moltiplicazioni per $g \in G$ che sono date invertibili. Una sottocategoria è un sottogruppo ma c'è una sola sottocategoria piena: $\mathfrak{C}$ stessa.

2.1 Funtori

Definizione 16. Date due categorie $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ un *funtore* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ è una regola che associa ad un oggetto $X \in \mathfrak{C}$ un oggetto $FX \in \mathfrak{D}$ e ad ogni morfismo $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ un morfismo $Ff \in \mathfrak{D}(X, Y)$ in modo che

(1) $F(fg) = F(f)F(g)$,

(2) $F(1_X) = 1_{FX}$.

Esiste il concetto di funtore identico (con la definizione ovvia) e si possono comporre funtori; quindi esiste anche il concetto di funtore isomorfismo e di categorie isomorfe ma non si rivela molto utile.

Esempio 7.

- $F : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ab}$ funtore che associa ad un gruppo il suo abelianizzato.

- π_1 : Spazi topologici puntati $\to \mathfrak{G}$ che associa ad uno spazio topologico con punto base il suo gruppo fondamentale.

- $F : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ ($\mathfrak{M}^l_\Lambda$ è la categoria dei Λ-moduli sinistri) con $FX = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X)$.

In generale se $\mathfrak{C}$ è una categoria ed $A \in \mathfrak{C}$ il funtore $\mathfrak{C}(A, \cdot) : \mathfrak{C} \to \mathfrak{S}$ si dice *funtore rappresentato da A*.

Sia $\mathfrak{C}$ una categoria; si definisce la categoria $\mathfrak{C}^{opp}$ con gli stessi oggetti di $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}^{opp}(X, Y) = \mathfrak{C}(Y, X)$ con la legge di composizione necessaria. $\mathfrak{C}^{opp}$ ha gli stessi 1_A di $\mathfrak{C}$ e gli stessi 0 (se esistono).

Definizione 17. Un *funtore controvariante* $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ è un funtore $\mathfrak{C}^{opp} \to \mathfrak{D}$.

Un esempio di funtore controvariante è $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, M)$.

Definizione 18. Un funtore $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ si dice *pieno* se

$$\mathfrak{C}(A, B) \xrightarrow{F} \mathfrak{C}(FA, FB)$$

è surgettiva; F si dice *fedele* se

$$\mathfrak{C}(A, B) \xrightarrow{F} \mathfrak{C}(FA, FB)$$

è iniettiva e si dice *full embedding* se è pieno, fedele e iniettivo sugli oggetti.

Non è detto che l'immagine di un funtore sia una sottocategoria della categoria di arrivo. Come controesempio si può considerare la categoria data dall'insieme parzialmente ordinato $S = \{a, b, c, d\}$ con l'ordine riflessivo e $a \prec b, c \prec d$ e la categoria data da $T = \{x, y, z\}$ con $x \prec y, y \prec z, x \prec z$. Un funtore $F : S \to T$ è una funzione che preserva l'ordine, ad esempio $F : a \mapsto x, b \mapsto y, c \mapsto y, d \mapsto z$. Se FS fosse una categoria allora la composizione dei morfismi $x \to y \to z$ sarebbe immagine di un morfismo $a \to d$ che non esiste.

Però se il funtore è un *full embedding* $F\mathfrak{C}$ è una sottocategoria piena.

2.1.1 Trasformazioni naturali

Definizione 19. Siano F e G due funtori $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$. Una *trasformazione naturale* t da F a G è una regola che assegna ad ogni oggetto $X \in \mathfrak{C}$ un morfismo $t_X \in \mathfrak{D}(FX, GX)$ tale che per ogni morfismo $f : X \to Y$ il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "t_Y"'] & GY \end{tikzcd}$$

Se tutti i t_X sono isomorfismi t si dice *equivalenza naturale*. I t_X si dicono *componenti* della trasformazione naturale t.

Il teorema 21 fornisce un esempio di equivalenza naturale. *11/03/08*

Le trasformazioni naturali si possono comporre e le composizione è associativa; perciò possiamo definire:

Definizione 20. Se $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ sono funtori che verificano $FG \cong Id_{\mathfrak{D}}$ (cioè il funtore FG è naturalmente equivalente al funtore identità $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$) e $GF \cong Id_{\mathfrak{C}}$ allora $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ si dicono *categorie equivalenti*.

Esempio 8. Sia $\mathfrak{V}_K^d$ la categoria degli spazi vettoriali su K di dimensione d ed $\mathfrak{R}^d$ la categoria con l'unico oggetto $\mathbb{R}^d$ ed $\mathfrak{R}^d(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) = \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^d)$. Allora esiste un funtore $F : \mathfrak{R}^d \to \mathfrak{V}_K^d$ (iniezione classica) e un altro funtore $G : \mathfrak{V}_K^d \to \mathfrak{R}^d$ che per ogni spazio vettoriale sceglie una base (questo è possibile perché nella teoria assiomatica di Gödel-Bernays è presente il cosiddetto *axiom of global choice*). F e G producono un'equivalenza naturale tra le due categorie.

2.1.2 Biduale di spazi vettoriali

Con gli strumenti introdotti finora possiamo formalizzare in modo preciso il fatto che, nel caso di dimensione finita, l'isomorfismo tra uno spazio vettoriale e il suo biduale è canonico. Sia $\mathfrak{V}_K$ la categoria degli spazi vettoriali su K e consideriamo "$i : \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K$"; cioè ad ogni $V \in \mathfrak{V}_K$ associamo un'applicazione lineare $i_V : V \to V^{**}$ definita da $i_V(v) = \widetilde{v}$ e se $\varphi \in V^*$ $\widetilde{v}(\varphi) = \varphi(v)$. Vogliamo interpretare i come una trasformazione naturale. Consideriamo il funtore identico $\mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K$ ed il funtore duale * : $\mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K$ che associa ad uno spazio $V \in \mathfrak{V}_K$ il suo duale $V^* \in \mathfrak{V}_K$ ed ad un'applicazione lineare $\varphi : V \to W$ la sua trasposta $\varphi^* : W^* \to V^*$ (cioè $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$). Componendo il funtore duale con se stesso otteniamo il funtore *biduale* $^{**} : \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K$. i è una trasformazione naturale tra il funtore identico ed il funtore biduale:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_V} & V^{**} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{**}} \\ W & \xrightarrow[i_W]{} & W^{**} \end{array}$$

il diagramma commuta; infatti sia $\varphi \in W^*$, $f^{**} \circ i_V(v)(\varphi) = i_V(v)(f^*(\varphi)) = i_V(v)(\varphi \circ f) = (\varphi \circ f)(v)$; ma anche $(i_W \circ f)(v)(\varphi) = \widetilde{f(v)}(\varphi) = \varphi(f(v)) = (\varphi \circ f)(v)$.

Se V ha dimensione finita i_V è un isomorfismo dunque i induce su $\mathfrak{V}_K^d$ un'equivalenza naturale.

Se $\mathfrak{C}$ ed $\mathfrak{D}$ sono categorie indichiamo con $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ la categoria in cui gli oggetti sono i funtori fra $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ ed $\mathrm{mor}(F, G)$ sono le trasformazioni naturali. In generale non è detto che $\mathrm{mor}(F, G)$ sia un insieme.

Esercizio 5. Trovare il controesempio.

Ma se $\mathfrak{C}$ ed $\mathfrak{D}$ sono *small category* allora $\mathrm{mor}(F, G)$ è un insieme.

2.2 Costruzioni universali

2.2.1 Prodotti e coprodotti di oggetti in categorie

Definizione 21. Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di oggetti in una categoria $\mathfrak{C}$; un *prodotto* $(X, \{p_i\}_{i\in I})$ è dato da un oggetto $X \in \mathfrak{C}$ e dai morfismi $p_i \in \mathfrak{C}(X, X_i)$ tali che

$$\begin{tikzcd} & X_i \\ Y \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, dashed, "\exists! f"'] & X \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

Se il prodotto esiste è unico.

- In $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ il prodotto esiste sempre ed è $\prod$ (prodotto diretto).
- Anche in $\mathfrak{S}$ il prodotto esiste sempre ed è il prodotto cartesiano.
- In $\mathfrak{S}(2)$ (insiemi di cardinalità 2) non esiste il prodotto. Infatti supponiamo di avere il seguente diagramma commutativo in $\mathfrak{S}(2)$ e supponiamo che D sia un prodotto.

$$\begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "h"'] \arrow[dr, bend right, "g"'] & D \arrow[u, "\pi_B"'] \arrow[d, "\pi_C"] \\ & C \end{tikzcd}$$

  Allora π_B e π_C devono essere surgettive (basta scegliere f e g surgettive) e quindi (sono morfismi in $\mathfrak{S}(2)$) iniettive. Segue che $h = \pi_B^{-1} \circ f = \pi_C^{-1} \circ g \Rightarrow g = \pi_C \circ \pi_B^{-1} \circ f$ che è assurdo (perché $|\mathfrak{S}(2)(A, C) > 1|$).

- Nella categoria dei gruppi ciclici non esiste il prodotto.

Esempio 9. Consideriamo la categoria $\mathfrak{G}_{tor}$ dei gruppi di torsione. Posso considerare il prodotto diretto nella categoria dei gruppi abeliani ma il prodotto di gruppi di torsione non è necessariamente un gruppo di torsione (ad esempio $\prod_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Però se $\{G_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di gruppi di torsione, H è un gruppo di torsione, $T \subseteq \prod_{i\in I} G_i$ è il sottogruppo di torsione ed abbiamo

$$\begin{tikzcd} & G_i \\ H \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f"'] & \prod_{i\in I} G_i \arrow[u, "\pi_i"'] \end{tikzcd}$$

allora necessariamente $f(H) \subseteq T$ e quindi T è il prodotto nella categoria dei gruppi di torsione di $\{G_i\}_{i\in I}$. In particolare il prodotto esiste ma non coincide con quello di $\mathfrak{Ab}$.

Definizione 22. In una categoria $\mathfrak{C}$ il *coprodotto* di una famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ è il prodotto degli $\{X_i\}_{i\in I}$ nella categoria $\mathfrak{C}^{opp}$. In particolare è dato da un oggetto $\coprod_{i\in I} X_i \in \mathfrak{C}$ e dai morfismi $g_i : X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ tali che

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[d, "g_i"] \\ Y & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[l, dashed, "\exists! f"] \end{tikzcd}$$

- In $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ il coprodotto è la somma diretta.

- In $\mathfrak{S}$ è l'unione disgiunta.

- Nella categoria degli spazi topologici è l'unione disgiunta (con la topologia ovvia)

- In $\mathfrak{G}$ è il prodotto libero $G * H$.

Definizione 23. In una categoria $\mathfrak{C}$ un *oggetto iniziale* è un $X \in \mathfrak{C}$ tale che per ogni $Y \in \mathfrak{C}$ $\mathfrak{C}(X,Y)$ ha un solo elemento; un *oggetto terminale* è un $X \in \mathfrak{C}$ tale che per ogni $Y \in \mathfrak{C}$ $\mathfrak{C}(Y,X)$ ha un solo elemento.

Esempio 10. Un oggetto iniziale di una categoria $\mathfrak{C}$ è un coprodotto su di un insieme vuoto di indici; un oggetto finale è un prodotto su di un insieme vuoto di indici.

2.2.2 Pull back e push out

Definizione 24. In una categoria $\mathfrak{C}$ dato uno schema

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\varphi"] \\ C \arrow[r, "\psi"'] & D \end{tikzcd}$$

il *pull back di* (φ, ψ) è dato da un oggetto $Y \in \mathfrak{C}$ e dai morfismi $\alpha : Y \to B$ e $\beta : Y \to C$ tali che $\varphi \circ \alpha = \psi \circ \beta$ e

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\exists! \xi"] \arrow[ddr, bend right, "\delta"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\
& C \arrow[r, "\psi"'] & D
\end{tikzcd}$$

cioè tale che $\forall Z \in \mathfrak{C}, \gamma : Z \to B, \delta : Z \to C$ che fanno commutare il diagramma esiste un unico $\xi : Z \to Y$ che fa commutare il diagramma.

Come sempre se il pull back esiste è unico.

- Mettiamoci in $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ e consideriamo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_C"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\
C \arrow[r, "\psi"'] & D
\end{tikzcd}$$

  Perché il diagramma commuti bisogna che $\varphi \circ \pi_B = \psi \circ \pi_C$. Perciò definiamo $\langle \varphi, -\psi \rangle : B \times C \to D$ ($B \times C$ indica il prodotto diretto) come $\langle \varphi, -\psi \rangle(b, c) = \varphi(b) - \psi(c)$ e consideriamo $A = \operatorname{Ker} \langle \varphi, -\psi \rangle$. Adesso il diagramma commuta per definizione; A è il pullback di (φ, ψ), infatti consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\delta"'] & & \\
& A \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_C"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\
& C \arrow[r, "\psi"'] & D
\end{tikzcd}$$

  Definiamo $\widetilde{\xi} : Z \to B \times C$ come $\widetilde{\xi}(z) = (\gamma(z), \delta(z))$, osserviamo che $\langle \varphi, -\psi \rangle \circ \widetilde{\xi}(z) = \varphi \circ \gamma(z) - \psi \circ \delta(z) = 0$. Quindi $\operatorname{Im} \widetilde{\xi} \subseteq A$ e $\widetilde{\xi}$ fattorizza tramite l'inclusione definendo $\xi : Z \to A$ che fa commutare il diagramma. Questa ξ è l'unica scelta possibile, infatti se $\eta : Z \to A$ è un altro omomorfismo che fa commutare il diagramma allora scrivendo $\eta(z) = (\eta_1(z), \eta_2(z))$ si ha che $\eta_1(z) = \pi_B \circ \eta(z) = \gamma(z)$ ed $\eta_2(z) = \pi_C \circ \eta(z) = \delta(z)$.

- In $\mathfrak{S}$ se $B, C \subseteq D$ ed $i_B : B \to D$ e $i_C : C \to D$ sono le inclusioni il pullback di (i_B, i_C) è $B \cap C$ con le inclusioni ovvie.

- In $\mathfrak{G}$ il pullback di (φ, ψ) è

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_C"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ C \arrow[r, "\psi"'] & D \end{tikzcd}$$

  dove $A = \{(c, d) \in C \times D : \varphi(c) = \psi(d)\}$.

Spesso il pull back si chiama *prodotto fibrato* (termine che viene dalla topologia).

Il push out è il pull back in $\mathfrak{C}^{opp}$ però è meglio darne una definizione esplicita

Definizione 25. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria, $Y, B, C \in \mathfrak{C}$ oggetti e $\alpha : Y \to B$, $\beta : Y \to C$ morfismi; allora il *push out* di (α, β) è dato da un oggetto $D \in \mathfrak{C}$ e due morfismi $\varphi : B \to D$ e $\psi : C \to D$ tali che $\varphi \circ \alpha = \psi \circ \beta$ e

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddr, bend left] & \\ C \arrow[r, "\psi"'] \arrow[drr, bend right] & D \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Ad esempio in $\mathfrak{G}$ il pushout di

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \\ H & \end{tikzcd}$$

è il prodotto amalgamato $G * H / \langle \alpha(f)\beta(f)^{-1} = id : \ f \in F \rangle$.

Esercizio 6. Esprimere il push out in $\mathfrak{M}^l_\Lambda$.

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

e l'omomorfismo $\langle \alpha, -\beta \rangle : Y \to B \oplus C, y \mapsto (\alpha(y), -\beta(y))$. Sia $D = \operatorname{coKer} \langle \alpha, -\beta \rangle$, chiamiamo $i_B : B \to B \oplus C$, $i_C : C \to B \oplus C$ le inclusioni e $\pi : B \oplus C \to D$ la proiezione al quoziente. Definiamo $\varphi = \pi \circ i_B$ e $\psi = \pi \circ i_C$; per ogni $y \in Y$ si ha $\varphi \circ (\alpha(y)) = [(\alpha(y), 0)] = [(0, \beta(y))] = \psi \circ \beta(y)$. Verifichiamo che D è il pushout del diagramma; consideriamo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
C \arrow[r, "\psi"'] \arrow[drr, bend right, "\delta"'] & D & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Definiamo $\widetilde{\xi} : B \oplus C \to Z$ come $\widetilde{\xi}(b, c) = \gamma(b) + \delta(c)$, osserviamo che $\widetilde{\xi} \circ \langle \alpha, -\beta \rangle(y) = \gamma \circ \alpha(y) - \delta \circ \beta(y) = 0$ e quindi $\operatorname{Im} \langle \alpha, -\beta \rangle \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{\xi}$ e $\widetilde{\xi}$ passa al quoziente e definisce $\xi : D \to Z$ che fa commutare il diagramma.

Vediamo che ξ è l'unica scelta possibile, infatti se η è un altro omomorfismo che fa commutare il diagramma, allora $\eta([b, c]) = \eta \circ \pi(b, 0) + \eta \circ \pi(0, c) = \eta \circ \varphi(b) + \eta \circ \psi(c) = \gamma(b) + \delta(c)$. $\square$

2.3 Funtori aggiunti

La costruzione che segue serve, tra le altre cose, a definire cos'è un oggetto libero in una categoria. Partiamo con un esempio; sia $F : \mathfrak{S} \to \mathfrak{M}^l_\Lambda$ con $FS = \oplus_{s \in S} \Lambda_s$ (il modulo libero su S) e $G : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{S}$ funtore dimenticante.

Sia $A \in \mathfrak{M}^l_\Lambda$ ed $S \in \mathfrak{S}$; posso considerare $\mathfrak{M}^l_\Lambda(FS, A)$ e $\mathfrak{S}(S, GA)$ e definire una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{rcl}
\eta_{SA} : \mathfrak{M}^l_\Lambda(FS, A) & \leftrightarrow & \mathfrak{S}(S, GA) \\
\varphi : FS \to A & \to & \varphi_{|S} : S \to GA \\
\widetilde{f} : FS \to A & \leftarrow & f : S \to GA
\end{array}$$

Vogliamo interpretare η_{SA} come equivalenza di funtori; per farlo dobbiamo dare un senso al seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}^l_\Lambda(FS, A) \arrow[r, "\eta_{SA}"] \arrow[d, "\mathfrak{M}^l_\Lambda(\Gamma)"'] & \mathfrak{S}(S, GA) \arrow[d, "\mathfrak{S}(\Gamma)"] \\
\mathfrak{M}^l_\Lambda(FS_1, A_1) \arrow[r, "\eta_{S_1 A_1}"'] & \mathfrak{S}(S_1, GA_1)
\end{tikzcd}$$

La prima cosa da capire è di che tipo di funtori vogliamo esibire un'equivalenza. η_{SA} manda morfismi in morfismi; perciò dobbiamo associare ad un insieme S e ad un modulo A l'insieme dei morfismi $\mathfrak{M}^l_\Lambda(FS, A)$. Inoltre di η_{SA} sappiamo solo che è corrispondenza biunivoca, perciò di $\mathfrak{M}^l_\Lambda(FS, A)$ consideriamo solo la struttura di insieme.

Vediamo di formalizzare a modo la cosa. Siano $\mathfrak{C}$ ed $\mathfrak{D}$ categorie; definiamo la categoria $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ che ha per oggetti coppie di oggetti (C, D) e per morfismi coppie di morfismi (φ, ψ). Dunque i nostri funtori vorrebbero essere del tipo $\mathfrak{S} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{S}$; ad una coppia (S, A) sappiamo associare l'insieme $\mathfrak{M}^l_\Lambda(FS, A)$ ma come associamo alla coppia di morfismi $(\varphi : S \to S_1, \psi : A \to A_1)$ un morfismo (di insiemi, quindi una funzione) $\mathfrak{M}^l_\Lambda(FS, A) \to \mathfrak{M}^l_\Lambda(FS_1, A_1)$? Se invece di avere $\varphi : S \to S_1$ avessimo $\varphi : S_1 \to S$ potremmo associare ad $\alpha \in \mathfrak{M}^l_\Lambda(FS, A)$ la composizione

$$FS_1 \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} FS \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\psi} A_1$$

Non c'è problema! Definiamo il nostro funtore del tipo $\mathfrak{S}^{opp} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{S}$. In questo modo un morfismo $\varphi \in \mathfrak{S}^{opp}(S, S_1)$ è una funzione $\varphi : S_1 \to S$.

A questo punto possiamo dire (in modo sensato) che η è un'equivalenza naturale tra i funtori $\mathfrak{M}^l_\Lambda(F\cdot, \cdot) : \mathfrak{S}^{opp} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{S}$ e $\mathfrak{S}(\cdot, G\cdot) : \mathfrak{S}^{opp} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{S}$.

Si dirà che F è l'aggiunto sinistro di G e si scriverà $F \dashv G$. L'aggiunto sinistro del funtore dimenticante (quando esiste) costruirà gli oggetti liberi.

Definizione 26. Dati $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ funtori ed $\eta = \eta_{XY} : \mathfrak{D}(FX, Y) \to \mathfrak{C}(X, GY)$ equivalenza naturale tra i funtori $\mathfrak{D}(F\cdot, \cdot) : \mathfrak{C}^{opp} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{S}$ e $\mathfrak{C}(\cdot, G\cdot) : \mathfrak{C}^{opp} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{S}$; si dice che F è *aggiunto sinistro* di G e G è *aggiunto destro* di F e si scrive $F \dashv G$.

In concetti di gruppo libero (nella categoria $\mathfrak{G}$) e di algebra polinomiale $K[x_1, \ldots, x_n]$ sono esprimibili in termini di funtori aggiunti sinistri del funtore dimenticante.

Consideriamo il funtore dimenticante dalla categoria delle K-algebre alla categoria $\mathfrak{V}_K$ degli spazi vettoriali su K; il suo aggiunto sinistro è il funtore che associa ad uno spazio vettoriale V l'algebra tensoriale $\mathscr{T}(V)$.

Esempio 11. In $\mathfrak{V}_K$ il funtore duale è l'aggiunto di se stesso.

Dimostrazione. Il funtore duale è controvariante, cioè è un funtore $\mathfrak{V}_K^{opp} \to \mathfrak{V}_K$, quindi è un po' delicato definire l'aggiunzione. Consideriamo i due funtori $F : \mathfrak{V}_K^{opp} \to \mathfrak{V}_K$ e $G : \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K^{opp}$, dove $F(V) = V^*$ e se $\varphi : W \to V \in \mathfrak{V}_K^{opp}(V, W)$ allora $F(\varphi) = \varphi^* : V^* \to W^* \in \mathfrak{V}_K(V^*, W^*)$; mentre $G(V) = V^*$ e se $\psi : V \to W \in \mathfrak{V}_K(V, W)$ allora $G(\psi) : W^* \to V^* \in \mathfrak{V}_K^{opp}(V^*, W^*)$.

Dunque $\mathfrak{V}_K(F\cdot, \cdot)$ è un funtore $\mathfrak{V}_K \times \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{S}$ tale che $\mathfrak{V}_K(F\cdot, \cdot)(V, W) = \mathrm{Hom}(V^*, W)$ e se $f : V_1 \to V_2$ e $g : W_1 \to W_2$ sono morfismi, allora

$\mathfrak{V}_K(F\cdot,\cdot)(f,g) : \mathrm{Hom}(V_1^*, W_1) \to \mathrm{Hom}(V_2^*, W_2)$ è definito da $\mathfrak{V}_K(F\cdot,\cdot)(f,g)(\varphi) = g \circ \varphi \circ f^*$.

Mentre $\mathfrak{V}_K^{opp}(\cdot, G\cdot) : \mathfrak{V}_K \times \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{S}$ è tale che $\mathfrak{V}_K^{opp}(\cdot, G\cdot)(V,W) = \mathrm{Hom}(W^*, V)$ e $\mathfrak{V}_K^{opp}(\cdot, G\cdot)(f,g) = f \circ \varphi \circ g^*$.

Se chiamiamo $\xi : \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K$ l'equivalenza naturale tra il funtore biduale e quello identico (è l'inversa di quella vista in precedenza) possiamo definire la nostra aggiunzione come

$$\begin{aligned} \eta_{VW} : \mathfrak{V}_K(FV, W) &\to \mathfrak{V}_K^{opp}(V, GW) \\ (\varphi : V^* \to W) &\mapsto (\xi_V \circ \varphi^* : W^* \to V). \end{aligned}$$

È facile vedere che tutte le componenti η_{VW} sono isomorfismi. Perché η sia un'aggiunzione bisogna che il seguente diagramma commuti (dove $f : V_1 \to V_2$ e $g : W_1 \to W_2$)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(V_1^*, W_1) \arrow[r, "\eta_{V_1W_1}"] \arrow[d, "(f,g)"'] & \mathrm{Hom}(W_1^*, V_1) \arrow[d, "(f,g)"] \\ \mathrm{Hom}(V_2^*, W_2) \arrow[r, "\eta_{V_2W_2}"'] & \mathrm{Hom}(W_2^*, V_2) \end{tikzcd}$$

Ora se $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_1^*, W_1)$ percorrendo il diagramma in un verso otteniamo $\eta_{V_2W_2}(g \circ \varphi \circ f^*) = \xi_{V_2} \circ f^{**} \circ \varphi^* \circ g^* = f \circ \xi_{V_1} \circ \varphi^* \circ g^*$ (dove abbiamo usato la naturalità di ξ), mentre percorrendolo nell'altro verso otteniamo proprio $f \circ \xi_{V_1} \circ \varphi^* \circ g^*$. Perciò $F \dashv G$. □

Esercizio 7. Rileggere il teorema 21 come aggiunzione tra i funtori $\Phi : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ dimenticante e $\Gamma : \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{M}_\Lambda$, con $\Gamma G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)$.

Dimostrazione. Il teorema 21 fornisce un'equivalenza naturale $\xi = \eta^{-1}$ tra i funtori $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, G)$ e $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G))$ definita da $(\psi : A \to G) \mapsto (a \mapsto \psi(\cdot a))$. Per interpretarla come aggiunzione bisogna che l'equivalenza sia naturale anche nella seconda variabile. Possiamo verificarlo per η, siano dunque $\alpha : B \to A$ e $\beta : G \to H$ morfismi nelle rispettive categorie; consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)) \arrow[r, "\eta_{AG}"] \arrow[d, "(\alpha,\beta)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G) \arrow[d, "(\alpha,\beta)"] \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, H)) \arrow[r, "\eta_{BH}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, H) \end{tikzcd}$$

Sia $\varphi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)$, allora per ogni $b \in B$ $(\alpha,\beta)(\eta_{AG}(\varphi))(b) = \beta(\eta_{AG}(\varphi)(\alpha(b))) = \beta(\varphi(\alpha(b))(1))$. Mentre $\eta_{BH}((\alpha,\beta)(\varphi))(b) = (\alpha,\beta)(\varphi)(b)(1) = \beta(\varphi(\alpha(b))(1))$ e il diagramma commuta. □

17/03/08

Definizione 27. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria con zero, $A, B \in \mathfrak{C}$ ed $\sigma : A \to B$ morfismo; il *nucleo* di σ è dato da un oggetto $K \in \mathfrak{C}$ ed un morfismo $\tau : K \to A$ tale che $\sigma \circ \tau = 0$ e per ogni $L \in \mathfrak{C}$ e $\gamma : L \to A$ tale che $\sigma \circ \gamma = 0$ esiste un unico morfismo $\tau_0 : L \to K$ tale che $\tau \circ \tau_0 = \gamma$. Oppure, con un diagramma:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "\tau"] \arrow[drr, bend left, "0_{KB}"] & & \\
 & A \arrow[r, "\sigma"] & B \\
L \arrow[uu, dashed, "\exists!\tau_0"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[urr, bend right, "0_{LB}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dualmente il *conucleo* di σ è dato da un oggetto $C \in \mathfrak{C}$ ed un morfismo $\tau : B \to C$ tale che $\tau \circ \sigma = 0$ e per ogni $L \in \mathfrak{C}$ e $\gamma : B \to L$ tale che $\gamma \circ \sigma = 0$ esiste un unico morfismo $\tau_0 : C \to L$ tale che $\tau_0 \circ \tau = \gamma$. Oppure, con un diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dd, dashed, "\exists!\tau_0"] \\
A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[urr, bend left, "0_{AC}"] \arrow[drr, bend right, "0_{AL}"'] & B \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
 & & L
\end{tikzcd}$$

Teorema 26. Se $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ ha un aggiunto sinistro (cioè se G è un aggiunto destro) allora G preserva prodotti, pull-back e nuclei.

Dimostrazione. Vediamo i prodotti. Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia in $\mathfrak{D}$ ed $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ con le proiezioni $\pi_i : Y \to Y_i$ prodotto in $\mathfrak{D}$; vogliamo dimostrare che GY con le proiezioni $G\pi_i : GY \to GY_i$ è il prodotto dei $\{GY_i\}_{i \in I}$ in $\mathfrak{C}$.

Sia $X \in \mathfrak{C}$ e consideriamo i morfismi $f_i : X \to GY_i$. Allora applicando η^{-1}_{XY} otteniamo

$$\begin{tikzcd}
 & Y_i \\
FX \arrow[ur, "\eta^{-1}_{XY_i}(f_i)"] \arrow[r, dashed, "\exists!g"'] & Y \arrow[u, "\pi_i"']
\end{tikzcd}$$

Ma possiamo considerare il seguente *naturality square*:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(FX, Y) \arrow[r, "\eta_{XY}"] \arrow[d, "\mathfrak{D}(F\cdot,\cdot)((id,\pi_i))"'] & \mathfrak{C}(X, GY) \arrow[d, "\mathfrak{C}(\cdot,G\cdot)((id,G\pi_i))"] \\
\mathfrak{D}(FX, Y_i) \arrow[r, "\eta_{XY_i}"'] & \mathfrak{C}(X, GY_i)
\end{tikzcd}$$

Adesso $g \in \mathfrak{D}(FX, Y)$ e seguendo un percorso sul quadrato otteniamo $g \mapsto \pi_i \circ g \mapsto \eta_{XY_i}(\pi_i \circ g) = \eta_{XY_i}(\eta^{-1}_{XY_i}(f_i)) = f_i$ e seguendo l'altro $g \mapsto \eta_{XY}(g) \mapsto G\pi_i \circ \eta_{XY}(g)$ e per la naturalità dell'aggiunzione (cioè la commutatività del quadrato) $G\pi_i \circ \eta_{XY}(g) = f_i$; cioè

$$\begin{tikzcd} & GY_i \\ X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, dashed, "\eta_{XY}(g)"'] & GY \arrow[u, "G\pi_i"'] \end{tikzcd}.$$

Per avere che GY è il prodotto dei $\{GY_i\}$ manca l'unicità. Sia $f' : X \to GY$ che fa commutare il diagramma e $g' = \eta^{-1}_{XY}(f') : FX \to Y$. Ora $G\pi_i \circ f' = f_i \Rightarrow \eta^{-1}_{XY_i}(f_i) = \eta^{-1}_{XY_i}(G\pi_i \circ f') = \pi \circ \eta^{-1}_{XY}(f') = \pi \circ g'$ (dove abbiamo usato la naturalità di η^{-1}) e dal fatto che Y è un prodotto abbiamo $g' = g$ e quindi $f' = \eta_{XY}(g)$.

Vediamo anche i pull-back, consideriamo i seguenti diagrammi

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ C \arrow[r, "\psi"'] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GY \arrow[r, "G\alpha"] \arrow[d, "G\beta"'] & GB \arrow[d, "G\varphi"] \\ GC \arrow[r, "G\psi"'] & GD \end{tikzcd}$$

vogliamo dimostrare che se il quadrato a sinistra è un pullback anche quello a destra lo è. Siano $Z \in \mathfrak{C}$ e $\gamma : Z \to GB$, $\delta : Z \to GC$ morfismi che lasciano il diagramma a destra commutativo; possiamo costruire i seguenti:

$$\begin{tikzcd} FZ \arrow[dr, dashed, "\xi"] \arrow[drr, bend left, "\eta^{-1}_{ZB}(\gamma)"] \arrow[ddr, bend right, "\eta^{-1}_{ZC}(\delta)"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ & C \arrow[r, "\psi"'] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\eta_{ZY}(\xi)"] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\delta"'] & & \\ & GY \arrow[r, "G\alpha"] \arrow[d, "G\beta"'] & GB \arrow[d, "G\varphi"] \\ & GC \arrow[r, "G\psi"'] & GD \end{tikzcd}$$

Dobbiamo dimostrare che il diagramma a destra commuta. Consideriamo il *naturality square*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}(FZ, Y) \arrow[r, "\eta_{ZY}"] \arrow[d, "\mathfrak{D}(F\cdot,\cdot)((id,\alpha))"'] & \mathfrak{C}(Z, GY) \arrow[d, "\mathfrak{C}(\cdot,G\cdot)((id,G\alpha))"] \\ \mathfrak{D}(FZ, B) \arrow[r, "\eta_{ZB}"'] & \mathfrak{C}(X, GB) \end{tikzcd}$$

Seguendo il quadrato lungo un percorso si ottiene $\xi \mapsto \eta_{ZY}(\xi) \mapsto G\alpha \circ \eta_{ZY}(\xi)$ mentre lungo l'altro si ottiene $\xi \mapsto \alpha \circ \xi \mapsto \eta_{ZB}(\alpha \circ \xi) = \eta_{ZB}(\eta^{-1}_{ZB}(\gamma)) = \gamma$ e per naturalità $G\alpha \circ \eta_{ZY}(\xi) = \gamma$. Allo stesso modo si dimostra che $G\beta \circ \eta_{ZY}(\xi) = \delta$. Vediamo l'unicità; se $\omega : Z \to GY$ è tale che $G\alpha \circ \omega = \gamma$ e $G\beta \circ \omega = \delta$ allora applicando η^{-1} si ha $\eta^{-1}_{ZB}(\gamma) = \eta^{-1}_{ZB}(G\alpha \circ \omega) = \alpha \circ \eta^{-1}_{ZY}(\omega)$ e $\eta^{-1}_{ZC}(\delta) = \eta^{-1}_{ZV}(G\beta \circ \omega) = \beta \circ \eta^{-1}_{ZY}(\omega)$ e dal fatto che il quadrato a sinistra è un pull-back abbiamo $\eta^{-1}_{ZY}(\omega) = \xi \Rightarrow \omega = \eta_{ZY}(\xi)$.

Per i nuclei si dimostra allo stesso modo. $\square$

Osservazione 10. Vale anche il teorema duale; vale a dire se $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ ha un aggiunto destro (cioè è un aggiunto sinistro) allora F preserva coprodotti, push-out e conuclei.

Capitolo 3

Estensioni di moduli

Definizione 28. Siano A e B Λ-moduli; un'*estensione di A tramite B* è una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Un esempio di estensione che si può costruire per ogni coppia di moduli è

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

questa si chiama *estensione banale*.

Definizione 29. Siano A e B Λ-moduli; due estensioni di A tramite B si dicono *equivalenti* se esiste $\psi : E \to E'$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Osservazione 11. Se tale ψ esiste è un isomorfismo, per il teorema 1.

Quella appena definita è una relazione d'equivalenza.

Chiamiamo $E(A, B)$ l'insieme delle classi di equivalenza di estensioni. Mostreremo che su $E(A, B)$ si può mettere una struttura di gruppo e lo faremo nel seguente modo; dimostreremo che $E(\cdot, \cdot) : {\mathfrak{M}^l_\Lambda}^{opp} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{S}$ è un funtore e costruiremo un altro funtore $\mathrm{Ext}\,(\cdot, \cdot) : {\mathfrak{M}^l_\Lambda}^{opp} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$. Infine mostreremo che componendo Ext con il funtore dimenticante si ottiene un funtore equivalente ad $E(\cdot, \cdot)$; in questo modo $E(A, B)$ eredita la struttura di gruppo di $\mathrm{Ext}\,(A, B)$.

Esempio 12. Esibiamo due estensioni che *non* sono equivalenti.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3\cdot"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1\mapsto[1]"] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3\cdot"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1\mapsto[2]"'] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se esistesse $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che fa commutare il diagramma avremmo dalla commutatività del primo quadrato che per $n \in \mathbb{Z}$ $3n = \varphi(3n) = 3\varphi(n)$ e quindi $\varphi(n) = n$. Mentre dalla commutatività del secondo avremmo $[2n] = [n]$ che è assurdo.

Osserviamo che nessuna delle due estensioni è banale infatti se così fosse avremmo che $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ che è assurdo perché il secondo ha torsione.

Lemma 27. Il quadrato

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd}$$

è un pull-back se e solo se la successione

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "{(\alpha,\beta)}"] & A \oplus B \arrow[r, "{\langle \varphi, -\psi \rangle}"] & X
\end{tikzcd}$$

è esatta.

Dimostrazione. La successione è esatta se e solo se $(Y, (\alpha, \beta))$ è il nucleo di $\langle \varphi, -\psi \rangle$. Cioè se e solo per $(\gamma, \delta) : Z \to A \oplus B$ tale che $\langle \varphi, -\psi \rangle \circ (\gamma, \delta) = 0$ esiste un unico omomorfismo $\tau : Z \to Y$ tale che $(\alpha, \beta) \circ \tau = (\gamma, \delta)$. Se e solo se per ogni $\gamma : Z \to A$, $\delta : Z \to A$ tale che $\varphi \circ \gamma = \psi \circ \delta$ esiste un unico $\tau : Z \to Y$ tale che

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\exists!\tau"] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\delta"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd}$$

se e solo se il quadrato è un pull-back. $\square$

Lemma 28. Se il quadrato

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

è un pull-back allora

(1) β induce un isomorfismo $\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\psi$.

(2) Se ψ è surgettiva allora α è surgettiva.

Dimostrazione. (1) Usiamo il fatto che conosciamo già una costruzione esplicita del pull-back ed il pull-back è unico a meno di isomorfismo; perciò possiamo costruire il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\vartheta"] \arrow[drr, bend left, "\pi_A"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_B"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ & B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

Dove $Z = \operatorname{Ker}\langle\varphi, -\psi\rangle \subseteq A \oplus B$ e ϑ è isomorfismo. In particolare ϑ induce un isomorfismo $\operatorname{Ker}\pi_A \to \operatorname{Ker}\alpha$ (per il fatto che è isomorfismo e che il diagramma commuta). Ora $\operatorname{Ker}\pi_A = \{(0,b) : b \in B\}$ e $\pi_B(0,b) = b$ e $0 = \langle\varphi, -\psi\rangle(0,b) = \varphi(0) - \psi(b) \Rightarrow \psi(b) = 0$ cioè $\pi_B(\operatorname{Ker}\pi_A) \subseteq \operatorname{Ker}\psi$.

Ora ovvio che $\pi_{B|\operatorname{Ker}\pi_A}$ è iniettiva; infatti se $\pi_B(0,b) = 0$ allora $b = 0$. Ma se $b \in \operatorname{Ker}\psi$ allora $(0,b) \in \operatorname{Ker}\langle\varphi, -\psi\rangle$ e quindi $\pi_B(\operatorname{Ker}\pi_A) = \operatorname{Ker}\psi$.

In sostanza $\pi_{B|\operatorname{Ker}\pi_A} : \operatorname{Ker}\pi_A \to \operatorname{Ker}\psi$ è isomorfismo e $\vartheta(\operatorname{Ker}\pi_A) = \operatorname{Ker}\alpha$; quindi $\beta = \pi_B \circ \vartheta^{-1} : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\psi$ è isomorfismo.

(2) Sia $a \in A$; allora per surgettività esiste $b \in B$ tale che $\varphi(a) = \psi(b)$ e $(a,b) \in \operatorname{Ker}\langle\varphi, -\psi\rangle = \operatorname{Im}(\alpha, \beta)$ (dove l'uguaglianza viene dal lemma precedente) e in particolare $a = \alpha(a')$.

□

Lemma 29. Consideriamo il diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\xi"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"'] & E \arrow[r, "\nu"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

allora il quadrato a destra è un pull-back.

Dimostrazione. Sia P un pull-back e consideriamo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dd, equal] \arrow[dr, equal] & & P \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dd, "\psi"'] & & A' \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[dr, equal] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & B \arrow[rr, "\kappa'"'] \arrow[dl, equal] & & E' \arrow[rr, "\nu'"'] \arrow[ul, dashed, "\vartheta"'] \arrow[dl, "\xi"] & & A' \arrow[r] \arrow[dl, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[rr, "\kappa"'] & & E \arrow[rr, "\nu"'] & & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Per la proposizione precedente ψ induce un isomorfismo tra $\operatorname{Ker}\varepsilon$ e $\operatorname{Ker}\nu \cong B$ e quindi possiamo definire $\mu : B \to P$ in modo che il diagramma commuti e le righe siano esatte. Per la proprietà universale del pull-back possiamo definire $\vartheta : E' \to P$ tale che $\psi \circ \vartheta = \xi$ e $\varepsilon \circ \vartheta = \nu'$. ϑ mantiene il diagramma commutativo, infatti $\varepsilon \circ \vartheta \circ \kappa' = \nu' \circ \kappa' = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\vartheta \circ \kappa' \subseteq \operatorname{Ker}\varepsilon$ e $\psi_{|\operatorname{Ker}\varepsilon} \circ \vartheta \circ \kappa' = \xi \circ \kappa' = k = \psi_{|\operatorname{Ker}\varepsilon} \circ \mu$ e $\psi_{|\operatorname{Ker}\varepsilon}$ si cancella perché è isomorfismo (lemma 28).

Allora per il teorema 1 ϑ è un isomorfismo. $\square$

Come al solito vale anche la proposizione duale.

Abbiamo detto che interpretiamo $E(\cdot,\cdot)$ come un bifuntore; ${\mathfrak{M}^l_\Lambda}^{opp} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{S}$. Intanto vediamo come possiamo definire il funtore (controvariante) $E(\cdot, B)$. Sia $\alpha : A' \to A$; dobbiamo definire una corrispondenza tra estensioni in $E(A,B)$ ed estensioni in $E(A',B)$. Consideriamo

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0$$

Possiamo costruire il pull-back di (ν, α):

$$\begin{tikzcd}
& & E^\alpha \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\xi"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"'] & E \arrow[r, "\nu"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

osserviamo che ν' è surgettiva per il lemma 28. Inoltre per esattezza $\operatorname{Ker}\nu = \operatorname{Im}\kappa \cong B$ e per il solito lemma $\xi_{|\operatorname{Ker}\nu'} : \operatorname{Ker}\nu' \to \operatorname{Ker}\nu$ è isomorfismo. Quindi possiamo definire $\kappa' = \xi^{-1}_{|\operatorname{Ker}\nu'} \circ \kappa : B \to E^\alpha$ che solleva κ ottenendo il diagramma con righe esatte.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, equal] & E^\alpha \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\xi"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"'] & E \arrow[r, "\nu"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e così associamo all'estensione data l'estensione

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa'} E^\alpha \xrightarrow{\nu'} A' \longrightarrow 0$$

Osservazione 12. Consideriamo due estensioni equivalenti:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa_1"'] & E_1 \arrow[r, "\nu_1"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e sia $\alpha : A' \to A$ omomorfismo; allora se il quadrato

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ E \arrow[r, "\nu"'] & A \end{tikzcd}$$

è un pull-back allora lo è anche

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\psi\circ\xi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ E' \arrow[r, "\nu_1"'] & A \end{tikzcd}$$

Questo segue facilmente dal fatto che ψ è isomorfismo e fa commutare il diagramma.

Proposizione 30. La definizione data di $\alpha^* : E(A, B) \to E(A', B)$ non dipende dal rappresentante scelto nella classe di equivalenza.

Dimostrazione.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\xi"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa_1"'] & E_1 \arrow[r, "\nu_1"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dove $(\nu', \psi \circ \xi)$ è un pull-back per il lemma 29. □

Proposizione 31. $E(\cdot, B)$ è un funtore, cioè:

(1) $(1_A)^* = id$

(2) Se $\alpha : A'' \to A'$ ed $\alpha' : A' \to A$ sono morfismi, allora $(\alpha \circ \alpha')^* = \alpha'^* \circ \alpha^*$.

Dimostrazione. Il primo è ovvio, per il secondo consideriamo la costruzione

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa''"] \arrow[d, equal] & E'' \arrow[r, "\nu''"] \arrow[d, "\xi'"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\xi"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"'] & E \arrow[r, "\nu"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

allora $(\nu'', \xi \circ \xi')$ è il pullback di $(\alpha \circ \alpha', \nu)$ (sempre lemma 29) da cui la tesi. □

Allo stesso modo possiamo costruire il funtore $E(A, \cdot)$ usando la proposizione duale del lemma 28. Sia $\beta : B \to B'$ e consideriamo l'estensione $0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0$. Costruiamo il pushout di (κ, β) e sappiamo che κ' è iniettiva e che ξ induce un isomorfismo $\widetilde{\xi} : \mathrm{coKer}\,\kappa \to \mathrm{coKer}\,\kappa'$; sia $\widetilde{\nu} : \mathrm{coKer}\,k \to A$ isomorfismo con $\widetilde{\nu} \circ \pi = \nu$ (che esiste per esattezza) e consideriamo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\beta"'] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & \mathrm{coKer}\,\kappa \arrow[r, "\widetilde{\nu}"] \arrow[d, "\widetilde{\xi}"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\kappa'"'] & E_\beta \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{coKer}\,\kappa' \arrow[r, "\widetilde{\nu'}"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

definiamo $\widetilde{\nu'} = \widetilde{\nu} \circ \widetilde{\xi}^{-1}$ e $\nu' = \widetilde{\nu'} \circ \pi : E_\beta \to A$ fa commutare il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\beta"'] & E \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\xi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\kappa'"'] & E_\beta \arrow[r, "\nu'"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ma noi vogliamo far vedere che $E(\cdot, \cdot)$ è un bifuntore. Osserviamo che dati i morfismi $\alpha : A' \to A$ e $\beta : B \to B'$, possiamo associare all'estensione $0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0$ un'estensione in $E(A', B')$ in due modi:

applicando prima $E(\cdot, B)$ e poi $E(A', \cdot)$ o viceversa. Nel primo caso si ottiene:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\kappa_2"] & E_2 \arrow[r, "\nu_2"] & A' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "\xi"'] & A' \arrow[u, equal] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"] & E \arrow[r, "\nu"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Mentre nel secondo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "k_4"'] \arrow[d, equal] & E_4 \arrow[r, "\nu_4"'] \arrow[d, "\vartheta"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\kappa_3"] & E_3 \arrow[r, "\nu_3"'] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\kappa"] & E \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\nu"] & A \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Ma le due estensioni ottenute sono equivalenti; infatti consideriamo il seguente diagramma dove E_1 ed E_4 sono pull-back mentre E_2 ed E_3 sono pushout.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & E_4 \arrow[dr] \arrow[dddl] & & \\
 & 0 \arrow[r] & B' \arrow[rr] \arrow[urrr, bend left] \arrow[dd, equal] & & E_2 \arrow[rr] \arrow[ur, dashed] & & A' \arrow[r] \arrow[dl, equal] \arrow[dd] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[rr] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dd, equal] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] \arrow[uurr, dashed] & & A' \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha"] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & B' \arrow[rr] & & E_3 \arrow[rr] & & A \arrow[r] \arrow[dl, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[rr] \arrow[ur, "\beta"] & & E \arrow[rr, "\nu"'] \arrow[ur] & & A \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Per la commutatività del diagramma $E_1 \to E \to E_3 \to A$ coincide con $E_1 \to A' \to A$ e quindi per la proprietà universale del pull-back (applicata ad E_4) esiste un unico morfismo $\vartheta : E_1 \to E_4$ tale che $E_1 \to E_4 \to E_3$ coincide con $E_1 \to E \to E_3$ e $E_1 \to E_4 \to A'$ coincide con $E_1 \to A'$.

Perché il diagramma rimanga commutativo bisogna dire che $B \to E_1 \to E_4$ coincide con $B \to B' \to E_4$. Chiamiamo ξ la mappa $B \to E_1 \to E \to E_3$

e ψ la mappa $B \to B' \to E_2 \to A'$; abbiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "\vartheta"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\xi"'] & & \\
& E_4 \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\
& E_3 \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

e dunque esiste un unica $\vartheta : B \to E_4$ tale che $\xi = \varphi \circ \vartheta$ (dove $\varphi : E_4 \to E_3$) e $\psi = \eta \circ \vartheta$ (dove $\eta : E_4 \to A'$) Ma dalla commutatività del diagramma sopra è facile vedere che sia $B \to E_1 \to E_4$ che $B \to B' \to E_4$ soddisfano la condizione e quindi coincidono.

Infine E_2 è un push-out e quindi esiste un morfismo $E_2 \to E_4$ tale che a $B' \to E_2 \to E_4$ coincide con $B' \to E_4$ e $E_1 \to E_2 \to E_4$ coincide con $E_1 \to E_4$ e in modo simile a prima si verifica che il diagramma commuta.

In particolare le estensioni E_2 ed E_4 sono equivalenti. Questo basta per dire che

Proposizione 32. $E(\cdot,\cdot)$ è un bifuntore ${\mathfrak{M}^l_\Lambda}^{opp} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{S}$.

Dimostrazione. È chiaro che $E(\cdot,\cdot)(id, id) = id$; l'unica cosa da verificare è che $E(\cdot,\cdot)$ si comporta bene con le composizioni.

Siano $\alpha_1 : A' \to A$, $\alpha_2 : A'' \to A'$, $\beta_1 : B \to B'$ e $\beta_2 : B' \to B''$. Se chiamiamo α_j^* e β_{j*} gli omomorfismi indotti dai funtori $E(\cdot, B)$ ed $E(A,\cdot)$ (rispettivamente) allora $E(\cdot,\cdot)((\alpha_2,\beta_2)(\alpha_1,\beta_1)) = \beta_{2*}\beta_{1*}\alpha_2^*\alpha_1^* = \beta_{2*}\alpha_2^*\beta_{1*}\alpha_1^* = E(\cdot,\cdot)(\alpha_2,\beta_2) \circ E(\cdot,\cdot)(\alpha_1,\beta_1)$. $\square$

Osservazione 13. Se P è proiettivo un'estensione

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

spezza e quindi è equivalente all'estensione banale; cioè per ogni modulo B $E(P, B)$ contiene soltanto la classe di equivalenza dell'estensione banale.

Analogamente se I è iniettivo $E(A, I)$ contiene soltanto la classe di equivalenza dell'estensione banale.

3.1 Il funtore Ext

Definiamo adesso il funtore Ext $: {\mathfrak{M}^l_\Lambda}^{opp} \times \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$. Questo sarà il primo esempio di *funtore derivato*.

Definizione 30. Sia A un Λ-modulo; una *presentazione proiettiva* di A è una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

con P proiettivo.

Osserviamo che ogni Λ-modulo ha almeno una presentazione proiettiva perché è quoziente di un modulo libero.

Fissato un Λ-modulo B possiamo considerare la successione esatta (detta *successione derivata* rispetto al funtore $\mathrm{Hom}(\cdot, B)$)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(P, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}(R, B)$$

e definire $\mathrm{Ext}^{\varepsilon}(A, B) = \mathrm{coKer}\,\mu^* \cong \mathrm{Hom}(R, B)/\mu^*\mathrm{Hom}(P, B)$. Abbiamo scritto $\mathrm{Ext}^{\varepsilon}(A, \cdot)$ per indicare che Ext dipende dalla presentazione proiettiva scelta, nel seguito facciamo cadere la ε anticipando il fatto che presentazioni proiettive diverse danno funtori $\mathrm{Ext}\,(A, \cdot)$ equivalenti. *18/03/08*

Sia $\alpha : A' \to A$ un omomorfismo e consideriamo due presentazioni proiettive di A ed A':

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, dotted, "\sigma"'] & P' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] & P \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Poiché P' è proiettivo esiste $\pi : P' \to P$ che fa commutare il diagramma. π è detto *sollevamento* di α. Ma π induce $\sigma : R' \to R$ che preserva la commutatività. Infatti $\varepsilon \circ \pi \circ \mu' = \alpha \circ \varepsilon' \circ \mu' = 0$ e quindi $\mathrm{Im}\,\pi \circ \mu' \subseteq \mathrm{Ker}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\mu$ e possiamo definire $\sigma = \mu^{-1} \circ \pi \circ \mu'$.

Sia $\psi \in \mathrm{Hom}(R, B)$, possiamo associare a ψ $\psi' = \psi \circ \sigma \in \mathrm{Hom}(R', B)$ e in questo modo definire l'applicazione $\pi^* : \mathrm{Ext}\,(A, B) \to \mathrm{Ext}\,(A', B)$ come $[\psi] \mapsto [\psi']$. La chiamiamo π^* perché, dal momento che σ è univocamente determinata da π, non dipende da σ. Osserviamo che π^* è ben definita; infatti sia $\psi \in \mu^*\mathrm{Hom}(P, B)$, cioè $\psi = \varphi \circ \mu$, allora $\pi^*\psi = \psi \circ \sigma = \varphi \circ \mu \circ \sigma = \varphi \circ \pi \circ \mu' \in \mu'^*\mathrm{Hom}(P', B)$.

Lemma 33. La mappa π^* *non* dipende da π ma solo da α.

Dimostrazione. Consideriamo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, bend right, "\sigma_1"'] \arrow[d, bend left, "\sigma_2"] & P' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, bend right, "\pi_1"'] \arrow[d, bend left, "\pi_2"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Osserviamo che $\varepsilon \circ \pi_1 = \alpha \circ \varepsilon' = \varepsilon \circ \pi_2$ e quindi $\mathrm{Im}\,(\pi_1 - \pi_2) \subseteq \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ ed esiste $\tau : P' \to R$ tale che $\pi_1 - \pi_2 = \mu \circ \tau$ e quindi $\mu \circ (\sigma_1 - \sigma_2) = (\pi_1 - \pi_2) \circ \mu' = \mu \circ \tau \circ \mu' \Rightarrow$ (per iniettività) $\sigma_1 - \sigma_2 = \tau \circ \mu'$.

Quindi se $\varphi \in \mathrm{Hom}(R, B)$ $\pi_1^*([\varphi]) = [\varphi \circ \sigma_1] = [\varphi \circ \sigma_2] + [\varphi \circ \tau \circ \mu'] = [\varphi \circ \sigma_2] = \pi_2^*([\varphi])$. □

Per enfatizzare l'indipendenza da π scriviamo $\alpha^* = (\alpha; P', P) = \pi^*$.

Proposizione 34. $\mathrm{Ext}\,(A, \cdot)$ è un funtore covariante $\mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$.

Dimostrazione. Sia $\beta : B \to B'$ omomorfismo e

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

presentazione proiettiva di A. β induce un omomorfismo $\beta_* : \mathrm{Hom}(R, B) \to \mathrm{Hom}(R, B')$, inoltre se $\varphi \circ \mu = \mu^*(\varphi) \in \mu^*(\mathrm{Hom}(P, B))$ allora $\beta_*(\varphi \circ \mu) = \beta \circ \varphi \circ \mu = \mu^*(\beta \circ \varphi)$ e quindi $\beta_*(\mu^*(\mathrm{Hom}(P, B))) \subseteq \mu^*(\mathrm{Hom}(P, B'))$. Quindi β_* passa al quoziente ed induce un omomorfismo

$$\beta_* : \underbrace{\mathrm{Hom}(R, B)/\mu^*\mathrm{Hom}(P, B)}_{=\mathrm{Ext}\,(A,B)} \to \underbrace{\mathrm{Hom}(R, B')/\mu^*\mathrm{Hom}(P, B')}_{=\mathrm{Ext}\,(A,B')}.$$

Se abbiamo i morfismi $\beta_1 : B \to B'$ e $\beta_2 : B' \to B''$ è chiaro che $(\beta_2 \circ \beta_1)_* = \beta_{2*} \circ \beta_{1*}$ (perché è vero per $\mathrm{Hom}(R, \cdot)$) ed è anche chiaro che $id_* = id$. □

Proposizione 35. $(\alpha; P', P)$ è una trasformazione naturale tra i funtori $\mathrm{Ext}\,(A, \cdot)$ ed $\mathrm{Ext}\,(A', \cdot)$.

Dimostrazione. Non c'è niente di complicato; sia $\beta : B \to B'$ omomorfismo, consideriamo il seguente *naturality square*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}\,(A, B) \arrow[r, "\alpha^*_B"] \arrow[d, "\beta_*"'] & \mathrm{Ext}\,(A', B) \arrow[d, "\beta_*"] \\
\mathrm{Ext}\,(A, B') \arrow[r, "\alpha^*_{B'}"'] & \mathrm{Ext}\,(A', B')
\end{tikzcd}$$

Sia $[\psi] \in \mathrm{Ext}\,(A, B)$, seguendo il quadrato da un lato si ottiene $\beta_*\alpha^*_B([\psi]) = \beta_*([\psi \circ \sigma]) = [\beta \circ \psi \circ \sigma]$ mentre seguendolo dall'altro lato si ottiene $\alpha^*_{B'}\beta_*([\psi]) = \alpha^*_{B'}([\beta \circ \psi]) = [\beta \circ \psi \circ \sigma]$. □

Siano $\alpha_1 : A' \to A$ ed $\alpha_2 : A'' \to A'$ morfismi e siano date le presentazioni proiettive P'', P' e P rispettivamente di A'', A' ed A; è chiaro che $(\alpha_1 \circ \alpha_2, P'', P') = \pi_1^* \circ \pi_2^*$ da cui

$$(\alpha_2; P'', P')(\alpha_1; P', P) = (\alpha_1 \circ \alpha_2; P'', P)$$

ed è anche chiaro che

$$(1_A; P, P) = 1_{\mathrm{Ext}\,(A,\cdot)}$$

Perciò anche $\mathrm{Ext}\,(\cdot, B)$ è un funtore (controvariante).

Se invece abbiamo due presentazioni proiettive diverse di A, P e P', possiamo considerare la trasformazione naturale $(1_A, P', P)$.

Proposizione 36. Siano

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow P \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow R' \longrightarrow P' \xrightarrow{\varepsilon'} A \longrightarrow 0$$

presentazioni proiettive di A. Allora

$$(1_A; P', P) : \mathrm{Ext}^{\,\varepsilon}(A, \cdot) \to \mathrm{Ext}^{\,\varepsilon'}(A, \cdot)$$

è un'equivalenza naturale.

Dimostrazione. Sappiamo già che è una trasformazione naturale; l'unica cosa che c'è da dire è che ogni componente è un isomorfismo. Ma per quanto osservato prima abbiamo che per ogni Λ-modulo B $(1_A, P, P')(1_A, P', P) = 1_{\mathrm{Ext}^{\,\varepsilon}(A,B)}$ e $(1_A, P', P)(1_A, P, P') = 1_{\mathrm{Ext}^{\,\varepsilon'}(A,B)}$ da cui la tesi. $\square$

Diremo che $\mathrm{Ext}\,(A, \cdot)$ *non* dipende dalla presentazione proiettiva scelta nel senso di questa proposizione.

Teorema 37. $\mathrm{Ext}\,(\cdot, \cdot)$ è un bifuntore controvariante nella prima variabile e covariante nella seconda.

Dimostrazione. Siano ora $\alpha : A' \to A$ e $\beta : B \to B'$ omomorfismi. Possiamo costruire un morfismo $\mathrm{Ext}\,(A, B) \to \mathrm{Ext}\,(A', B')$ in due modi:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ext}\,(A, B') \arrow[dr, "\alpha^*"] & \\
\mathrm{Ext}\,(A, B) \arrow[ur, "\beta_*"] \arrow[dr, "\alpha^*"'] & & \mathrm{Ext}\,(A', B') \\
 & \mathrm{Ext}\,(A', B) \arrow[ur, "\beta_*"'] &
\end{tikzcd}$$

ma questo è esattamente il *naturality square* visto prima (un po' storto) e quindi i due lati del quadrato inducono lo stesso morfismo che chiamiamo $(\alpha, \beta)_*$.

Se abbiamo i morfismi $\alpha_1 : A' \to A$, $\alpha_2 : A'' \to A'$, $\beta_1 : B \to B'$, $\beta_2 : B' \to B''$ allora $(\alpha_2, \beta_2)_* \circ (\alpha_1, \beta_1)_* = \alpha_2^* \circ \beta_{2*} \circ \alpha_1^* \circ \beta_{1*} = \alpha_2^* \circ \alpha_1^* \circ \beta_{2*} \circ \beta_{2*} = (\alpha_1 \circ \alpha_2, \beta_2 \circ \beta_1)_*$. $\square$

Nel teorema seguente componiamo il funtore Ext con il funtore dimenticante e, con un abuso di notazione, chiamiamo il funtore ottenuto Ext.

Teorema 38. C'è un'equivalenza naturale η tra i funtori $E(\cdot,\cdot)$ ed $\operatorname{Ext}(\cdot,\cdot)$.

Dimostrazione. Dobbiamo definire η in componenti; perciò fissiamo A e B Λ-moduli, P una presentazione proiettiva di A; fissiamo un'estensione in $E(A,B)$ e consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, dotted, "\psi"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"'] & E \arrow[r, "\nu"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Come al solito esiste π che solleva l'identità e π induce una ψ che mantiene il diagramma commutativo. Definiamo $\eta_{AB}(E) = [\psi]$. Dobbiamo verificare che

(1) la definizione non dipende da π e che

(2) non dipende dal rappresentante scelto nella classe di equivalenza in $E(A,B)$.

Per il primo punto osserviamo che se π' è un'altro omomorfismo che solleva l'identità allora, come abbiamo fatto in precedenza, costruiamo $\tau : P \to B$ tale che $\pi - \pi' = \kappa\tau$ e quindi $\psi - \psi' = \tau\mu$ e $[\psi] = [\psi']$. Forti di questo fatto è ovvio che $[\psi]$ non dipende dal rappresentante scelto nella classe di equivalenza in $E(A,B)$.

Mostriamo che η è naturale in B; sia $\beta : B \to B'$ morfismo, sia E un'estensione in $E(A,B)$ e consideriamo il seguente diagramma dove abbiamo fissato una presentazione proiettiva di A.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\xi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"'] \arrow[u, "\psi"] & P \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[u, "\pi'"'] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

applicando prima $E(A,\cdot)(\beta)$ e poi $\eta_{AB'}$ si ottiene $[\psi]$, mentre applicando prima η_{AB} e poi $\operatorname{Ext}(A,\cdot)(\beta)$ si ottiene $[\beta \circ \varphi]$. Ma sappiamo che $[\psi]$ non dipende dal sollevamento dell'identità scelto, perciò possiamo prendere $\pi' = \xi \circ \pi$ e quindi, poiché ψ è univocamente determinata da π', avere $\psi = \beta \circ \varphi$.

Adesso mostriamo la naturalità in A. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & R \arrow[rr] \arrow[dd] & & P \arrow[rr] \arrow[dd] & & A \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & P' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & A' \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & B \arrow[rr] & & E \arrow[rr] & & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[ur, equal] \arrow[rr] & & E_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & A' \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

dove E_1 è un pull-back. Se dimostriamo che esistono i morfismi $P' \to E_1$ ed $R' \to B$ che fanno commutare il diagramma l'elemento ottenuto applicando prima $E(\cdot, B)(\alpha)$ e poi $\eta_{A'B}$ è il morfismo $R' \to B$ e coincide con il morfismo $R' \to R \to B$ che è l'elemento ottenuto applicando prima η_{AB} e poi $\mathrm{Ext}\,(\cdot, B)(\alpha)$.

Osserviamo che per costruzione i morfismi $P' \to P \to E \to A$ e $P' \to A' \to A$ coincidono, perciò per proprietà universale del pull-back esiste un unico morfismo $P' \to E_1$ tale che $P' \to E_1 \to E$ coincide con $P' \to P \to E$ e $P' \to E_1 \to A'$ coincide con $P' \to A'$. Inoltre $P' \to E_1$ determina univocamente il morfismo $R' \to B$ e sapendo che questo coincide con $R' \to P' \to E_1 \to B$ e che $R \to B$ coincide con $R \to P \to E \to B$ (dove è possibile percorrere le frecce in senso inverso) e sfruttando le relazioni di commutatività già presenti si ha che il diagramma commuta.

Questo basta per dire che η è una trasformazione naturale di bifuntori. Inoltre osserviamo che prendendo nel diagramma precedente $A' = A$, $\alpha = id_A$ e $P' \neq P$ si ha che η_{AB} *non* dipende dalla presentazione proiettiva scelta di A.

Per mostrare che η è un'equivalenza costruiamo una sua inversa $\xi_{AB} : \mathrm{Ext}\,(A, B) \to E(A, B)$. Fissiamo una presentazione proiettiva di A e consideriamo $[\psi] \in \mathrm{Ext}\,(A, B)$. Costruiamo il push-out di (μ, ψ):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"'] & Y \arrow[r, "\gamma"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

poichè α induce un isomorfismo tra $\mathrm{coKer}\,\mu$ e $\mathrm{coKer}\,\beta$ possiamo definire γ in modo che il diagramma commuti (come abbiamo già fatto in precedenza).

In questo modo associamo a ψ una estensione in $E(A,B)$ ma dobbiamo verificare che questa costruzione è indipendente dal rappresentante scelto in $[\psi]$. Sia $\psi' = \psi + \tau \circ \mu$ un altro rappresentante in $[\psi]$ allora $\beta\psi' = \beta\psi + \beta\tau\mu = \alpha\mu + \beta\tau\mu = (\alpha + \beta\tau)\mu$ e quindi il seguente diagramma commuta (dove $\alpha' = \alpha + \beta\tau$).

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi'"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha'"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"'] & Y \arrow[r, "\gamma"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e per il duale del lemma 29 il quadrato a sinistra è un push-out ed otteniamo la stessa estensione.

ξ_{AB} è l'inversa di η_{AB} infatti dal fatto che il diagramma precedente è commutativo abbiamo che η_{AB} associa all'estensione Y l'elemento $[\psi] \in \mathrm{Ext}\,(A,B)$; mentre se abbiamo un'estensione in $E(A,B)$ per il duale del lemma 29 il seguente diagramma è un push-out

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e quindi $\xi_{AB}(\eta_{AB}(E)) = \xi_{AB}(\psi) = E$. □

Esempio 13. Verifichiamo che lo zero in $E(A,B)$ è la successione che spezza. Lo 0 in $\mathrm{Ext}\,(A,B)$ viene indotto da un morfismo $\psi : R \to B$ tale che $\psi = \tau \circ \mu$ con $\tau : P \to B$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dl, "\tau"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"'] & Y \arrow[r, "\nu"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Costruiamo un push-out (φ, κ) e la mappa ν come al solito. Possiamo definire un'inversa destra $\sigma : A \to Y$; $(\varphi - \kappa\tau)\mu = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\mu \subseteq \mathrm{Ker}\,(\varphi - \kappa\tau)$ e quindi possiamo definire σ tale che $\sigma\varepsilon = \varphi - \kappa\tau$. Ora $\nu\sigma\varepsilon = \nu\varphi - \nu\kappa\tau = \nu\varphi = \varepsilon$ e quindi $(\nu\sigma - id_A)\varepsilon = 0$ e $A = \mathrm{Im}\,\varepsilon \subseteq \mathrm{Ker}\,(\nu\sigma - id_A) \Rightarrow \nu\sigma = id_A$ cioè σ è un'inversa destra di ν e la successione spezza.

Calcolo di alcuni Ext

Esempio 14. Calcoliamo $\mathrm{Ext}\,(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. Una presentazione proiettiva di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ è $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{4\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Applicando Hom otteniamo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{(4\cdot)^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

Sia $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ con $\varphi(1) = [a]$ allora $(4\cdot)^*(\varphi)(1) = [4a] = 0$ e quindi $(4\cdot)^*$ è l'applicazione nulla ed $\mathrm{Ext}\,(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Sappiamo allora che ci devono essere quattro (classi di equivalenza di) estensioni; elenchiamole

(0) L'estensione nulla è quella che spezza:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(1) Un'altra estensione immediata è

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{[a]\mapsto[4a]} \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ci chiediamo quale elemento sia in $\mathrm{Ext}\,(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, vediamo la sua immagine attraverso $\eta_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "4\cdot"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

φ deve sollevare l'identità, quindi possiamo prendere la proiezione al quoziente $\varphi(m) = [m]_{16}$. ψ quindi deve far commutare il diagramma, cioè deve essere $[4\psi(n)]_{16} = \varphi(4n) = [4n]_{16}$. e quindi $\psi(n) = [n]_4$ va bene e l'estensione data corrisponde ad 1 nell'isomorfismo $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(2) Vogliamo costruire l'estensione che corrisponde a 2, cioè all'omomorfismo $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ definito da $\psi(n) = [2n]_4$; vediamo la sua immagine tramite $\xi_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "(4\cdot)"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "\kappa"'] & Y \arrow[r, "\nu"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Costruiamo il pushout di $(4\cdot, \psi)$ e la mappa ν come al solito. Ma noi conosciamo una costruzione esplicita del pushout in $\mathfrak{M}^l_\Lambda$: $Y = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/\mathrm{Im}\,(4\cdot, -\psi) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/\langle (4, [2]) \rangle \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\langle (4,2), (0,4) \rangle$. Ora $\langle (4,2), (0,4) \rangle = \langle (8,0), (4,2) \rangle = \langle 8(1,0), 2(2,1) \rangle$ ed $\{(1,0), (2,1)\}$ è base di $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Quindi $Y \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\langle (8,0), (0,2) \rangle \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e l'estensione 2 è

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(3) Calcoliamo l'estensione 3; come nel punto precedente si costruisce il push-out della mappa $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, 1 \mapsto 3$ e l'estensione corrispondente è

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow Y \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dove $Y = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/\langle (4, -[3]) \rangle = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/\langle (4, [1]) \rangle \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\langle (0,4), (4,1) \rangle$ e $\langle (0,4), (4,1) \rangle = \langle (16,0), (4,1) \rangle$ e come prima $Y \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\langle 16(1,0), (4,1) \rangle \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.

Ovviamente l'estensione ottenuta non potrà essere equivalente a quella corrispondente ad 1.

Esempio 15. Calcoliamo $\mathrm{Ext}\,(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$; la presentazione proiettiva di $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ è la solita $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{8\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ ·

$$\mathrm{Ext}\,(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/\mathrm{Im}\,(8\cdot)^* \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Le estensioni sono $E = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/Y$ dove

(0) $Y = \langle (8,0) \rangle \Rightarrow E \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$,

(1) $Y = \langle (8,[1]) \rangle \Rightarrow E \cong \mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$,

(2) $Y = \langle (8,[2]) \rangle \Rightarrow E \cong \mathbb{Z}/48\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

(3) $Y = \langle (8,[3]) \rangle \Rightarrow E \cong \mathbb{Z}/32\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$.

Lemma 39. (1) $\mathrm{Ext}\,(\oplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}\,(A_i, B)$;

(2) $\mathrm{Ext}\,\left(A, \prod_{j\in J} B_j\right) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{Ext}\,(A, B_j)$.

Dimostrazione. (1) Per ogni A_i scegliamo una presentazione proiettiva

$$0 \longrightarrow R_i \xrightarrow{\mu_i} P_i \xrightarrow{\varepsilon_i} A_i \longrightarrow 0\,.$$

Passando alle somme otteniamo una presentazione proiettiva

$$0 \longrightarrow \oplus_{i\in I} R_i \xrightarrow{\mu} \oplus_{i\in I} P_i \xrightarrow{\varepsilon} \oplus_{i\in I} A_i \longrightarrow 0\,.$$

Consideriamo il seguente diagramma commutativo in cui le frecce verticali sono isomorfismi:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(\oplus_{i\in I} P_i, B) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\,(\oplus_{i\in I} R_i, B) \arrow[d] \\
\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(P_i, B) \arrow[r, "\nu"] & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(R_i, B)
\end{tikzcd}$$

Allora $\operatorname{Ext}(\oplus_{i\in I}A_i, B) = (\operatorname{Hom}(\oplus_{i\in I}R_i, B)) / (\mu^*\operatorname{Hom}(\oplus_{i\in I}P_i, B)) \cong \left(\prod_{i\in I}\operatorname{Hom}(R_i, B)\right) / \left(\nu\prod_{i\in I}\operatorname{Hom}(P_i, B)\right) \cong \prod_{i\in I}\operatorname{Hom}(R_i, B)/\mu_i^*\operatorname{Hom}(P_i, B) = \prod_{i\in I}\operatorname{Ext}(A_i, B)$.

(2) Prendiamo una presentazione proiettiva di A

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

allora $\operatorname{Ext}(A, \prod_{j\in J}B_j) = \operatorname{Hom}(R, \prod_{j\in J}B_j)/\mu^*\operatorname{Hom}(P, \prod_{j\in J}B_j) \cong (\prod_{j\in J}\operatorname{Hom}(R, B_j))/(\prod_{j\in J}\mu^*\operatorname{Hom}(P, B_j)) \cong \prod_{j\in J}\operatorname{Hom}(R, B_j)/\operatorname{Hom}(P, B_j) = \prod_{j\in J}\operatorname{Ext}(A, B_j)$.

□

Parlando di gruppi abeliani quindi abbiamo

(1) $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = (0)$ ed $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = (0)$ perché $\mathbb{Z}$ è libero e le estensioni spezzano.

(2) $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(3) $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z}$.

Questi fatti insieme al lemma precedente (ed al teorema di struttura) danno il seguente

Corollario 40. Se A è un gruppo abeliano finitamente generato allora A è libero se e solo se $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$.

In generale A libero $\Leftrightarrow$ ($\mathbb{Z}$ è PID) A proiettivo $\Leftrightarrow$ ogni successione

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

spezza. Ma per il corollario precedente se A è finitamente generato basta controllare le successioni con $K = \mathbb{Z}$.

In generale A libero $\Rightarrow \operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) = (0)$ ma il viceversa è argomento di ricerca. Comunque esiste il seguente

Teorema 41 (Stein-Serre)**.** Se A è un gruppo abeliano di rango numerabile allora $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) = (0) \Rightarrow A$ libero.

Se invece A è un gruppo abeliano finito (sempre per il teorema di struttura) $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) = A$.

Osservazione 14. Sia $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ è esatta ed $(m,n) = 1$ allora $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = (0)$ e quindi la successione spezza.

Ext con gli iniettivi Possiamo costruire il funtore Ext anche usando le presentazioni iniettive. Una presentazione iniettiva di un modulo B è una sequenza esatta

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\vartheta} I \xrightarrow{\eta} S \longrightarrow 0$$

Con I iniettivo (esiste sempre perché sappiamo che ogni modulo si immerge in un modulo iniettivo). Questa induce una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\vartheta_*} \mathrm{Hom}(A,I) \xrightarrow{\eta_*} \mathrm{Hom}(A,S)$$

e definiamo $\overline{\mathrm{Ext}}^{\vartheta}_{\Lambda}(A,B) = \mathrm{coKer}\,\eta_*$ Si dimostra che $\overline{\mathrm{Ext}}\,(\cdot,\cdot)$ è un bifuntore ed è equivalente ad $\mathrm{Ext}\,(\cdot,\cdot)$.

Proposizione 42. Se un gruppo abeliano A ha torsione allora $\overline{\mathrm{Ext}}\,(A,\mathbb{Z}) \neq 0$.

Dimostrazione. Consideriamo una presentazione iniettiva di $\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
 & & A \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] & \langle a \rangle \arrow[l, "i"] \arrow[u, "\varphi\neq 0"'] &
\end{tikzcd}$$

e sia $a \in A$ di ordine finito ed $i : \langle a \rangle \to A$ immersione. Esiste $\varphi : \langle a \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ omomorfismo non nullo (ad esempio $\varphi(a) = \frac{1}{o(A)}$) e per iniettività φ si estende a $\widetilde{\varphi} : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Ora un omomorfismo $\alpha : A \to \mathbb{Q}$ è necessariamente nullo perché A ha torsione e quindi $[\widetilde{\varphi}] \neq 0$. $\square$

Quindi se A è un gruppo abeliano ed $\mathrm{Ext}\,(A,\mathbb{Z}) = (0)$ allora A non ha torsione.

3.2 Prodotto tensore e funtore Tor

31/03/08

Definizione 31. Siano A un Λ-modulo destro e B un Λ-modulo sinistro; il prodotto tensore $A \otimes_\Lambda B$ è definito come il quoziente del gruppo abeliano libero sui simboli $a \otimes b$ con $a \in A$ e $b \in B$ con le relazioni:

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2) \otimes b &= (a_1 \otimes b) + (a_2 \otimes b) \\
a \otimes (b_1 + b_2) &= a \otimes b_1 + a \otimes b_2 \\
a\lambda \otimes b &= a \otimes \lambda b.
\end{aligned}$$

Osservazione 15. Se consideriamo Λ rispettivamente come Λ-modulo destro e sinistro possiamo definire le applicazioni

$$\Lambda \otimes_\Lambda B \to B, \quad A \otimes_\Lambda \Lambda \to A$$

date da $\lambda \otimes b \mapsto \lambda b$ e $a \otimes \lambda \mapsto a\lambda$ che risultano essere isomorfismi; infatti le loro inverse sono rispettivamente $b \mapsto 1 \otimes b$ e $a \mapsto a \otimes 1$.

Osservazione 16. Un omomorfismo $\alpha : A \to A'$ induce un omomorfismo $\alpha_* : A \otimes_\Lambda B \to A' \otimes_\Lambda B$ definito da $\alpha_*(a \otimes b) = \alpha(a) \otimes b$ e analogamente un omomorfismo $\beta : B \to B'$ induce un omomorfismo $\beta_* : A \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B'$ definito da $\beta_*(a \otimes b) = a \otimes \beta(b)$. In questo modo $\cdot \otimes_\Lambda B : \mathfrak{M}^r_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ e $A \otimes_\Lambda \cdot : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ sono funtori covarianti, inoltre $\cdot \otimes_\Lambda \cdot$ è un bifuntore.

Teorema 43. Per ogni Λ-modulo destro A il funtore $A \otimes_\Lambda \cdot : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ è aggiunto sinistro del funtore $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A, \cdot) : \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{M}^l_\Lambda$.

Dimostrazione. Dobbiamo definire l'equivalenza naturale η tra i due funtori in modo che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A \otimes B, G) \arrow[r, "\eta_{BG}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A\otimes\cdot,\cdot)(\vartheta)"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A, G)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot,\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A,\cdot))(\vartheta)"] \\
\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A \otimes B', G') \arrow[r, "\eta_{B'G'}"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B', \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A, G'))
\end{tikzcd}$$

dove $\vartheta = (\vartheta_B : B' \to B, \vartheta_G : G \to G')$. Sia $\psi \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A \otimes B, G)$, definiamo $(\eta_{BG}(\psi)(b))(a) = \psi(a \otimes b)$. Per dimostrare che η è un'equivalenza costruiamo un'inversa ξ. Sia $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A, G))$, definiamo $\xi_{BG}(\varphi)(a \otimes b) = \varphi(b)(a)$. Ora $\xi_{BG}(\eta_{BG}(\psi))(a \otimes b) = \eta_{BG}(\psi)(b)(a) = \psi(a \otimes b) \Rightarrow \xi_{BG} \circ \eta_{BG} = id$ e anche $\eta_{BG}(\xi_{BG}(\varphi))(b)(a) = \xi_{BG}(\varphi)(a \otimes b) = \varphi(b)(a) \Rightarrow \eta_{BG} \circ \xi_{BG} = id$.

Verifichiamo la naturalità di η. Siano $\beta : B' \to B$, $\gamma : G \to G'$ e $\psi : A \otimes B \to G$ allora $(\beta, \gamma)_*(\eta_{BG}(\psi))(b')(a) = \gamma \circ \eta_{BG}(\psi)(\beta(b'))(a) = \gamma(\psi(a \otimes \beta(b')))$ mentre $\eta_{B'G'}((\beta, \gamma)_*(\psi))(b')(a) = (\beta, \gamma)_*(\psi)(a \otimes b') = \gamma(\psi(a \otimes \beta(b')))$. □

Corollario 44. Siano $\{B_j\}_{j \in J} \subseteq \mathfrak{M}^l_\Lambda$ ed A un Λ-modulo destro; allora

(1) $A \otimes_\Lambda (\oplus_{j \in J} B_j) = \oplus_{j \in J}(A \otimes_\Lambda B_j)$ (perché il funtore $A \otimes_\Lambda \cdot$ preserva i coprodotti).

(2) Se $B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ è una successione esatta di Λ-moduli sinistri allora

$$A \otimes_\Lambda B' \longrightarrow A \otimes_\Lambda B \longrightarrow A \otimes_\Lambda B'' \longrightarrow 0$$

è esatta (perché $A \otimes_\Lambda \cdot$ preserva i conuclei).

Osservazione 17. L'esattezza a sinistra non vale; infatti consideriamo

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e sia $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Allora possiamo costruire il seguente diagramma in cui le frecce verticali sono gli isomorfismi già introdotti e $[m] \otimes [n] \mapsto [mn]$ è un isomorfismo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \arrow[r, "p\cdot"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, "\mu"'] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ma $\mu([n]) = [pn] = 0$ non è iniettiva.

Definizione 32. $B \in \mathfrak{M}^l_\Lambda$ si dice *piatto* se per ogni successione esatta corta di Λ-moduli destri $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ la successione

$$0 \longrightarrow A' \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0$$

è esatta.

C'è una definizione analoga per i Λ-moduli destri. Osserviamo che $B \in \mathfrak{M}^l_\Lambda$ è piatto se e solo se per ogni morfismo iniettivo $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A$ il morfismo indotto $0 \longrightarrow A' \otimes B \longrightarrow A \otimes B$ è iniettivo.

Teorema 45. Ogni modulo proiettivo è piatto.

Dimostrazione. Sia P un Λ-modulo proiettivo, allora P è addendo diretto di un modulo libero, cioè $P \oplus P_1 = F$ con F libero. Siccome il prodotto tensore conserva le somme la successione

$$A' \otimes F \longrightarrow A \otimes F \longrightarrow A'' \otimes F \longrightarrow 0$$

equivale a

$$(A' \otimes P) \oplus (A' \otimes P_1) \longrightarrow (A \otimes P) \oplus (A \otimes P_1) \longrightarrow (A'' \otimes P) \oplus (A'' \otimes P_1) \longrightarrow 0$$

e dunque basta dimostrare la tesi per i moduli liberi. Ma $F \cong \oplus_{i\in I}\Lambda$ ed ancora basta dimostrare la tesi per $F = \Lambda$. Infine possiamo considerare il diagramma dove le frecce verticali sono gli isomorfismi noti

$$\begin{tikzcd}
 & A' \otimes \Lambda \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes \Lambda \arrow[r] \arrow[d] & A'' \otimes \Lambda \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e quindi $A' \otimes \Lambda \longrightarrow A \otimes \Lambda$ è iniettiva. $\square$

Proposizione 46. Se Λ è un dominio ad ideali principali, un Λ-modulo M è piatto se e solo se è libero da torsione.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Qui basta che Λ sia un dominio d'integrità. Sia M un Λ-modulo sinistro con un elemento di torsione; cioè supponiamo che esistano $m \in M$ ed $a \in \Lambda$ tali che $a \neq 0$, $m \neq 0$ e $am = 0$. Allora consideriamo la successione (dove consideriamo Λ come Λ modulo destro)

$$0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{a\cdot} \Lambda \longrightarrow \Lambda/\langle a\rangle \longrightarrow 0$$

Osserviamo che $a\cdot$ è iniettiva perché Λ è un dominio. Applicando $\cdot \otimes M$ otteniamo la successione

$$0 \longrightarrow \Lambda \otimes M \xrightarrow{(a\cdot)\otimes id} \Lambda \otimes M \longrightarrow \Lambda/\langle a\rangle \otimes M \longrightarrow 0$$

Ma $(a\cdot) \otimes id : 1 \otimes m \mapsto a \otimes m = 1 \otimes am = 1 \otimes 0 = 0$ e quindi non è iniettiva.

($\Leftarrow$) Sia M Λ-modulo sinistro libero da torsione e consideriamo la solita successione esatta

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

e sia $A' \otimes M \ni \sum(a'_i \otimes b_i) \mapsto \sum(\varphi(a'_i) \otimes b_i) = 0$ con $\sum(a'_i \otimes b_i) \neq 0$ (attenzione! non vanno considerati solo i tensori semplici $a \otimes b$).

Visto come elemento del gruppo libero abeliano sui simboli $a \otimes b$ allora $\sum(\varphi(a'_i) \otimes b_i)$ è somma finita di relazioni e dunque esistono i moduli finitamente generati $A_0 \subseteq A$, $A'_0 \subseteq A'$ e $B_0 \subseteq \cancel{B}$ M tali che $\langle a'_i\rangle \subseteq A'_0$, $\langle \varphi(a'_i)\rangle \subseteq A_0$, $\langle b_i\rangle \subseteq B_0$ e $\sum(\varphi(a'_i) \otimes b_i) = 0$ anche in $A_0 \otimes B_0$.

Allora la successione

$$0 \longrightarrow A'_0 \xrightarrow{\varphi} A_0 \longrightarrow A_0/\varphi(A'_0) \longrightarrow 0$$

è esatta ma $A'_0 \otimes B_0 \xrightarrow{\varphi\otimes id} A_0 \otimes B_0$ non è iniettiva. Però, se Λ è un dominio ad ideali principali, un Λ-modulo finitamente generato e libero da torsione è libero (vedi esercizio seguente) e quindi piatto; da cui l'assurdo.

$\square$

Esempio 16. Se A è un anello commutativo e $S \subseteq A$ è moltiplicativamente chiuso, allora $S^{-1}A$ è un A-modulo piatto; infatti per ogni A-modulo M $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$ e sappiamo che il funtore $S^{-1}\cdot : \mathfrak{M}_A \to \mathfrak{M}_A$ è esatto.

Osservazione 18. $\mathbb{Q}$ è piatto (perché è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero da torsione, oppure perché è una localizzazione di $\mathbb{Z}$) ma non è libero.

Esercizio 8. Sia Λ un dominio ad ideali principali ed $M \in \mathfrak{M}^l_\Lambda$ libero da torsione e finitamente generato, allora M è libero.

Dimostrazione. Sia $\{y_1, \ldots, y_m\}$ un insieme di generatori e sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un suo sottoinsieme linearmente indipendente massimale. Allora esistono $a_1 \neq 0, b_{11}, \ldots, b_{n1}$ tali che

$$a_1 y_1 + b_{11} v_1 + b_{21} v_2 + \cdots + b_{n1} v_n = 0,$$

ed analogamente per ogni $i = 1, \ldots, m$ esistono $a_i \neq 0, b_{1i}, \ldots, b_{ni}$ tali che

$$a_i y_i + b_{1i} v_1 + b_{2i} v_2 + \cdots + b_{ni} v_n = 0.$$

Sia $a = a_1 a_2 \cdots a_n$; allora $0 \longrightarrow M \xrightarrow{a\cdot} M$ è iniettiva perché M è libero da torsione inoltre $aM \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \cong \Lambda^n$ dove l'ultimo isomorfismo viene dal fatto che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti. Allora $M \cong aM$ è sottomodulo di modulo libero e dal fatto che Λ è ad ideali principali abbiamo che M è libero. $\square$

3.2.1 Il funtore Tor

Sia A un Λ-modulo destro e B un Λ-modulo sinistro,

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mu} P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

una presentazione proiettiva di A; allora

$$R \otimes B \xrightarrow{\mu_*} P \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$$

è esatta. Definiamo $\mathrm{Tor}\,(A, B) = \mathrm{Ker}\,\mu_*$.

$\mathrm{Tor}\,(A, \cdot) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ è un funtore covariante; sia $\varphi : B \to B'$ omomorfismo, consideriamo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tor}\,(A,B) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi_*"'] & R \otimes B \arrow[d, "id \otimes \varphi"] \\ \mathrm{Tor}\,(A,B') \arrow[r] & R \otimes B' \end{tikzcd}$$

Osserviamo che $(\mu \otimes id_{B'}) \circ (id_R \otimes \varphi) = (id_P \otimes \varphi) \circ (\mu \otimes id_B)$ (perché l'uguaglianza vale sui generatori di $R \otimes B$) e quindi $(id_R \otimes \varphi)(\mathrm{Ker}\,\mu_*) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mu_*$ e $id_R \otimes \varphi$ induce una mappa $\varphi_* : \mathrm{Tor}\,(A, B) \to \mathrm{Tor}\,(A, B')$.

Se invece consideriamo una presentazione proiettiva di B

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\nu} Q \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

abbiamo ancora che la successione

$$A \otimes S \xrightarrow{\nu_*} A \otimes Q \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$$

è esatta e possiamo definire $\overline{\mathrm{Tor}}\,(A, B) = \mathrm{Ker}\,\nu^*$. Anche qui $\overline{\mathrm{Tor}}\,(\cdot, B)$ è un funtore covariante.

Definizione 33. Sia

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma"] & B \arrow[d, "\varphi"] \\
A' \arrow[r, "\beta"'] & B'
\end{tikzcd}$$

un quadrato commutativo. Definiamo $\mathrm{Ker}\,\Sigma = \mathrm{Ker}\,\varphi \circ \alpha/(\mathrm{Ker}\,\alpha + \mathrm{Ker}\,\psi)$ e $\mathrm{Im}\,\Sigma = (\mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\beta)/\mathrm{Im}\,(\varphi \circ \alpha)$.

Lemma 47. Siano

$$\begin{tikzcd}
\Gamma' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_1"] & \Gamma \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_2"] & \Gamma'' \arrow[d, "\varphi''"] \\
A' \arrow[r, "\beta_1"'] & A \arrow[r, "\beta_2"'] & A''
\end{tikzcd}$$

dove le righe sono esatte. Allora $\mathrm{Im}\,\Sigma_1 \cong \mathrm{Ker}\,\Sigma_2$.

Dimostrazione. Dobbiamo dire che $\mathrm{Ker}\,\varphi'' \circ \alpha_2/(\mathrm{Ker}\,\alpha_2 + \mathrm{Ker}\,\varphi) \cong (\mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\beta_1)/\mathrm{Im}\,\varphi \circ \alpha_1$.

Osserviamo che se $\gamma \in \mathrm{Ker}\,\varphi'' \circ \alpha_2$ allora $\beta_2 \circ \varphi(\gamma) = \varphi'' \circ \alpha_2(\gamma) = 0 \Rightarrow \varphi(\mathrm{Ker}\,\varphi'' \circ \alpha_2) \subseteq \mathrm{Ker}\,\beta_2 = \mathrm{Im}\,\beta_1 \Rightarrow \varphi(\mathrm{Ker}\,\varphi'' \circ \alpha_2) \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\beta_1$. Ma se $a = \varphi(\gamma) = \beta_1(a')$ allora $\varphi'' \circ \alpha_2(\gamma) = \beta_2 \circ \varphi(\gamma) = \beta_2 \circ \beta_1(a') = 0$ e quindi $\varphi(\mathrm{Ker}\,\varphi'' \circ \alpha_2) = \mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\beta_1$.

Sia $\pi : \mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\beta_1 \to (\mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\beta_1)/\mathrm{Im}\,\varphi \circ \alpha_1$ proiezione al quoziente. È chiaro che $\mathrm{Ker}\,\alpha_2 + \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\alpha_1 + \mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi \circ \varphi$; sia invece $\gamma \in \Gamma$ tale che $\varphi(\gamma) = \varphi \circ \alpha_1(\gamma')$, allora $\gamma_1 = \gamma - \alpha_1(\gamma') \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ e $\gamma = \gamma_1 + \alpha_1(\gamma') \in \mathrm{Ker}\,\alpha_2 + \mathrm{Ker}\,\varphi$, da cui $\mathrm{Ker}\,\alpha_2 + \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\pi \circ \varphi$.

Perciò φ induce un isomorfismo $\widetilde{\varphi} : \mathrm{Ker}\,\Sigma_2 \to \mathrm{Im}\,\Sigma_1$. $\square$

Proposizione 48. $\overline{\mathrm{Tor}}\,(A, B) \cong \mathrm{Tor}\,(A, B)$.

Dimostrazione. Consideriamo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_5"] & \mathrm{Tor}\,(A,B) \arrow[d] & \\
 & & R\otimes S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_3"] & R\otimes Q \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_4"] & R\otimes B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_1"] & P\otimes S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_2"] & P\otimes Q \arrow[r] \arrow[d] & P\otimes B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{Tor}}\,(A,B) \arrow[r] & A\otimes S \arrow[r] \arrow[d] & A\otimes Q \arrow[r] \arrow[d] & A\otimes B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dove la colonna centrale è esatta perché Q è proiettivo e la riga centrale è esatta perché P è proiettivo e i quadrati commutano perché $\cdot \otimes \cdot$ è un bifuntore. Allora $\mathrm{Im}\,\Sigma_1 \cong \mathrm{Ker}\,\Sigma_2 \cong \mathrm{Im}\,\Sigma_3 \cong \mathrm{Ker}\,\Sigma_4 \cong \mathrm{Im}\,\Sigma_5$. Ma $\mathrm{Im}\,\Sigma_5 \cong \mathrm{Tor}\,(A,B)$ e $\mathrm{Im}\,\Sigma_1 \cong \overline{\mathrm{Tor}}\,(A,B)$. □

01/04/08

Esercizio 9. Sia B un gruppo abeliano; allora

$$\mathrm{Tor}\,(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, B) = \mathrm{Tor}_m(B) = \{b \in B : mb = 0\}.$$

$\mathrm{Tor}_m(B)$ è la parte di m-torsione.

Dimostrazione. Sia $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ la solita presentazione proiettiva di $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Allora

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}\,(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, B) \arrow[r] & \mathbb{Z}\otimes B \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, dash] & \mathbb{Z}\otimes B \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes B \arrow[r] \arrow[d, dash] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_m(B) \arrow[r] & B \arrow[r, "m\cdot"'] & B \arrow[r] & B/mB \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove le righe verticali sono isomorfismi. □

Esercizio 10. Sia R un anello commutativo ed $r \in R$ un elemento non divisore di zero, B un R-modulo sinistro, allora $\mathrm{Tor}\,(R/(r), B) = \{b \in B : rb = 0\}$ la parte di r-torsione.

Si dimostra come l'esercizio precedente considerando la successione (dove $r\cdot$ è iniettiva perché r non è zero divisore):

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{r\cdot} R \longrightarrow R/(r) \longrightarrow 0$$

Osservazione 19 (Importante). Possiamo calcolare Tor anche con le presentazioni piatte. Si definisce il funtore Tor^{Fl} e si dimostra equivalente al funtore Tor con lo stesso diagramma della proposizione 48, dove la colonna centrale rimane esatta perché la presentazione è piatta.

Esercizio 11. Sia B un gruppo abeliano allora $\operatorname{Tor}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = T(B)$ è il sottogruppo di torsione.

Dimostrazione. Consideriamo la presentazione piatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e quindi la successione esatta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow B \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} B \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi_*} B \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Se $S = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ allora $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong S^{-1}B$ tramite $b \otimes \frac{p}{q} \mapsto \frac{pb}{q}$ ed abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & B \otimes \mathbb{Z} \arrow[r, "i^*"] \arrow[d] & B \otimes \mathbb{Q} \arrow[d] \\
 & & B \arrow[r, "j"'] & S^{-1}B
\end{tikzcd}$$

dove $j(b) = \frac{b}{1}$. Se $b \in T(B)$ ed $n \in \operatorname{Ann}(b)$ allora $\frac{b}{1} = \frac{nb}{n} = \frac{0}{1}$; viceversa se $b \in \operatorname{Ker} j$ allora $\frac{b}{1} = \frac{0}{1}$ ed esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n(b - 0) = nb = 0$. $\square$

Capitolo 4

Funtori derivati

4.1 Complessi

Definizione 34. Sia Λ un anello con unità. Un Λ-*modulo graduato* è una famiglia $A = \{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ di Λ-moduli.

Chiamiamo $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$ la categoria dei Λ-moduli graduati. Un *morfismo* di Λ-moduli graduati di *grado* k tra $A = \{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $B = \{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una famiglia $\varphi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ di omomorfismi $\varphi_i : A_i \to B_{k+i}$.

Definizione 35. Un *complesso di catene* è dato da un Λ-modulo graduato $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ed un morfismo $\partial = \{\partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(C, C)$ di grado -1 tale che $\partial \circ \partial = 0$.

Un *morfismo di complessi* tra $(C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \partial = \{\partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ e $(D = \{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \widetilde{\partial} = \{\widetilde{\partial}_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ è un morfismo di Λ-moduli graduati $\varphi \in \mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(C, D)$ di grado 0 tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"'] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

Possiamo quindi definire la categoria Comp_Λ dei complessi su Λ.

4.1.1 Categorie additive

Definizione 36. Una categoria $\mathfrak{U}$ si dice *additiva* se

(0) Ha l'elemento 0,

(1) ogni coppia di oggetti ha un prodotto,

(2) $\forall A, B \in \mathfrak{U}\ \mathfrak{U}(A, B)$ è un gruppo abeliano,

(3) la composizione $\mathfrak{U}(A, B) \times \mathfrak{U}(B, C) \to \mathfrak{U}(A, C)$ è bilineare.

$\mathfrak{M}^l_\Lambda$ ed $\mathfrak{M}^r_\Lambda$ sono categorie additive. Anche Comp_Λ è additiva ma $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ *non* è additiva, anche restringendosi ai soli morfismi di grado k. Comunque $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}_\Lambda$ è additiva se ci si restringe ai morfismi di grado 0.

Nelle categorie additive prodotti e somme si comportano come in $\mathfrak{M}^l_\Lambda$. Introduciamo la seguente notazione se $A \times B$ è un prodotto ed $\alpha : Z \to A, \beta : Z \to B$ sono morfismi indichiamo con $\{\alpha, \beta\} : Z \to A \times B$ il morfismo indotto da α e β. Analagamente se $A \oplus B$ è una somma diretta e $\gamma A \to Z, \delta : B \to Z$ sono morfismi indichiamo il morfismo indotto come $\langle \gamma, \delta \rangle : A \oplus B \to Z$.

Sia $\mathfrak{U}$ una categoria additiva ed $A, B \in \mathfrak{U}$. Chiamiamo $i_A = \{id_A, 0_{AB}\} : A \to A \times B$ ed $i_B = \{0_{BA}, id_B\} : B \to A \times B$.

Osservazione 20. Se $\pi_A : A \times B \to A$ e $\pi_B : A \times B \to B$ sono proiezioni, allora $i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B = id_{A \times B}$.

Infatti, usando il fatto che la composizione è bilineare si ha: $\pi_A \circ (i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B) = \pi_A \circ i_A \circ \pi_A + \pi_A \circ i_B \circ \pi_B = id_A \circ \pi_A + 0_{BA} \circ \pi_B = \pi_A$ e allo stesso modo $\pi_B \circ (i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B) = \pi_B$ e poi si usa la proprietà universale del prodotto (unicità).

Osservazione 21. Per ogni $A, B \in \mathfrak{U}$ il morfismo 0_{AB} è lo 0 del gruppo abeliano $\mathfrak{U}(A, B)$.

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathrm{Hom}(A, 0) = \{0_A\} = (0)$ e $\mathrm{Hom}(0, B) = \{0^B\} = (0)$ sono gruppi banali e per bilinearità $0_{AB} = 0^B \circ 0_A$ è lo zero del gruppo $\mathfrak{U}(A, B)$. □

Proposizione 49. Se $\mathfrak{U}$ è una categoria additiva e $A, B \in \mathfrak{U}$ allora $A \times B$ è il coprodotto di A e B con le inclusioni $i_A = \{id_A, 0_{AB}\} : A \to A \times B$ ed $i_B = \{0_{BA}, id_B\} : B \to A \times B$

Dimostrazione. Consideriamo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] & & \\
& A \times B & Z \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "\delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definiamo $\langle\gamma,\delta\rangle : A\times B \to Z$ come $\langle\gamma,\delta\rangle = \gamma\circ\pi_A+\delta\circ\pi_B$. Questo morfismo mantiene il diagramma commutativo, infatti $\langle\gamma,\delta\rangle\circ i_A = \gamma\circ\pi_A\circ i_A + \delta\circ\pi_B\circ i_A = \gamma\circ id_A + \delta\circ 0_{AB} = \gamma$ ed allo stesso modo $\langle\gamma,\delta\rangle\circ i_B = \delta$.

Resta da vedere l'unicità. Se $\vartheta : A\times B \to Z$ è un altro morfismo che mantiene il diagramma commutativo, allora (usando l'osservazione precedente) $\vartheta = \vartheta\circ(i_A\circ\pi_A+i_B\circ\pi_B) = \vartheta\circ i_A\circ\pi_A+\vartheta\circ i_B\circ\pi_B = \gamma\circ\pi_A+\delta\circ\pi_B = \langle\gamma,\delta\rangle$. □

Osserviamo che, dal fatto che $\pi_A\circ i_B = 0_{BA}$ e $\pi_A\circ i_A = id_A$ abbiamo $\pi_A = \langle id_A, 0_{BA}\rangle$ e analogamente $\pi_B = \langle 0_{AB}, id_B\rangle$.

Osservazione 22. Se $\{\varphi,\psi\} : A \to B\times C$ e $\langle\gamma,\delta\rangle : B\times C \to D$, allora $\langle\gamma,\delta\rangle\circ\{\varphi,\psi\} = \gamma\circ\varphi+\delta\circ\psi$.

Dimostrazione. $\langle\gamma,\delta\rangle\circ\{\varphi,\psi\} = (\gamma\circ\pi_B+\delta\circ\pi_C)\circ\{\varphi,\psi\} = \gamma\circ\pi_B\circ\{\varphi,\psi\} + \delta\circ\pi_C\circ\{\varphi,\psi\} = \gamma\circ\varphi+\delta\circ\psi$. □

Definizione 37. Un *funtore additivo* è un funtore $F : \mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ tra categorie additive tale che per ogni $A, B \in \mathfrak{U}_1$ $F : \mathfrak{U}_1(A,B) \to \mathfrak{U}_2(FA,FB)$ è un omomorfismo di gruppi abeliani.

Proposizione 50. Un funtore $F : \mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ tra categorie additive è additivo se e solo se preserva le somme di due oggetti se e solo se preserva i prodotti di due oggetti.

Dimostrazione. Dimostriamo che se F preserva i prodotti allora preserva le somme. Siano $A, B \in \mathfrak{U}_1$, per ipotesi $F(A\times B)$ è un prodotto con le proiezioni $F\pi_A$, $F\pi_B$; inoltre sappiamo che $F(A\times B)$ è una somma con le inclusioni $i_{FA} = \{id_{FA}, 0_{FAFB}\}$ e $i_{FB} = \{id_{FB}, 0_{FBFA}\}$. Perciò basta dire che $F0_{AB} = 0_{FAFB}$ e per questo è sufficiente che sia $F0_{\mathfrak{U}_1} = 0_{\mathfrak{U}_2}$.

Osserviamo che se $\varphi : C \to A$ e $\psi : B \to C$ sono morfismi, allora per bilinearità della composizione vale $0_{AB}\circ\varphi = 0_{CB}$ e $\psi\circ 0_{AB} = 0_{AC}$ (questo è vero in ogni categoria con 0).

Ogni $A \in \mathfrak{U}_1$ può essere considerato come il prodotto $A\times 0$ con le proiezioni $\pi_A = id_A$ e $\pi_0 = 0_A$. Infatti per ogni morfismo $\varphi : B \to A$ e $\psi : A \to B$ i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
B \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[urr, bend left, "\varphi"] \arrow[drr, bend right] & A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[dr] & \\
 & & 0
\end{tikzcd} , \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "id_A"'] \arrow[drr, bend left, "\psi"] & & \\
 & A \arrow[r, "\psi"'] & B \\
0 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Allora FA è il prodotto $FA \times F0$ e possiamo costruire il seguente (dove ψ è l'unico morfismo $A \to 0$)

$$\begin{tikzcd}
& & FA \\
F0 \arrow[r, dashed, "\vartheta"'] \arrow[urr, bend left, "0_{F0FA}"] \arrow[drr, bend right, "id"'] & FA \arrow[ur, "id"'] \arrow[dr, "F\psi"] & \\
& & F0
\end{tikzcd}$$

e $id_{F0} = F\psi \circ \vartheta = F\psi \circ 0_{F0FA} = 0_{F0F0}$. Perciò per ogni morfismo $\varphi : B \to F0$ si ha $\varphi = id_{F0} \circ \varphi = 0_{F0F0} \circ \varphi = 0_{BF0}$ ed $F0$ è terminale e per ogni $\varphi : F0 \to B$ si ha $\varphi = \varphi \circ id_{F0} = \varphi \circ 0_{F0F0} = 0_{F0B}$ ed $F0$ è iniziale.

Adesso dimostriamo che se F preserva le somme allora $F : \mathfrak{U}_1(A, B) \to \mathfrak{U}_1(FA, FB)$ è omomorfismo. Siano $\varphi, \psi : A \to B$, allora $\varphi + \psi = \langle \varphi, \psi \rangle \circ \{id_A, id_A\}$ e quindi $F(\varphi + \psi) = \langle F\varphi, F\psi \rangle \circ \{id_{FA}, id_{FA}\} = F\varphi + F\psi$.

Infine per mostrare che se F è additivo allora preserva i prodotti basta vedere che

$$\{F\pi_A, F\pi_B\} : F(A \times B) \to FA \times FB$$

è un isomorfismo e lo facciamo mostrando che $Fi_A \circ \pi_{FA} + Fi_B \circ \pi_{FB} : FA \times FB \to F(A \times B)$ è la sua inversa. Infatti

$$\begin{aligned}
\{F\pi_A, F\pi_B\} \circ (Fi_A \circ \pi_{FA} + Fi_B \circ \pi_{FB}) &= \\
\{F\pi_A, F\pi_B\} \circ Fi_A \circ \pi_{FA} + \{F\pi_A, F\pi_B\} \circ Fi_B \circ \pi_{FB} &= \\
\{F(\pi_A \circ i_A), F(\pi_B \circ i_B)\} \circ \pi_{FA} + \{F(\pi_A \circ i_B), F(\pi_B \circ i_B)\} \circ \pi_{FB} &= \\
\{id_{FA}, 0\} \circ \pi_{FA} + \{0, id_{FB}\} \circ \pi_{FB} = i_{FA} \circ \pi_{FA} + i_{FB} \circ \pi_{FB} = id_{FA \times FB}&.
\end{aligned}$$

ed anche

$$\begin{aligned}
(Fi_A \circ \pi_A + Fi_B \circ \pi_B) \circ \{F\pi_A, F\pi_B\} &= \\
Fi_A \circ \pi_A \circ \{F\pi_A, F\pi_B\} + Fi_B \circ \pi_B \circ \{F\pi_A, F\pi_B\} &= \\
Fi_A \circ F\pi_A + Fi_B \circ F\pi_B = F(i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B) = F(id_{A \times B}) = id_{F(A \times B)}&.
\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 23. Se $F : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{M}^l_{\Lambda'}$ è un funtore additivo covariante allora $C \in \mathrm{Comp}_\Lambda \Rightarrow FC \in \mathrm{Comp}_{\Lambda'}$; inoltre associando ad un morfismo $\varphi : C \to D$ un morfismo $F\varphi : FC \to FD$ nel modo ovvio si ottiene un funtore additivo $F : \mathrm{Comp}_\Lambda \to \mathrm{Comp}_{\Lambda'}$.

Esempi di funtori additivi sono $A \otimes \cdot$ e $\mathrm{Hom}(A, \cdot)$.

Definizione 38. Sia $\dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots$ un complesso su Λ; $H_*(C)$ è il Λ-modulo graduato $H_*(C) = \{H_n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $H_n(C) = \operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1}$. $H_n(C)$ è detto *n-esimo modulo di omologia*.

Un morfismo di complessi $\varphi : C \to D$ induce un morfismo $\varphi_* : H_*(C) \to H_*(D)$ e $H_* : \mathrm{Comp}_\Lambda \to \mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ risulta un funtore covariante.

$c \in C_n$ si dice *catena*; se $\partial_n(c) = 0$ c si dice *ciclo* e se $c = \partial_{n+1}(d)$ c si dice *bordo* (terminologia che viene dalla topologia algebrica).

Esempio 17. Sia B un Λ-modulo sinistro e $0 \longrightarrow S \longrightarrow Q \longrightarrow B \longrightarrow 0$ una sua presentazione proiettiva; possiamo considerare il *complesso* C:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow S \xrightarrow{\partial_1} Q \xrightarrow{\partial_0} 0 \longrightarrow 0$$

e il suo *complesso derivato* D:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A\otimes S \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} A\otimes Q \xrightarrow{\widetilde{\partial}_0} 0 \longrightarrow 0$$

Allora $H_1(D) = \operatorname{Ker}\widetilde{\partial}_1/\operatorname{Im}\widetilde{\partial}_2 = \operatorname{Tor}(A,B)$ e $H_0(D) = \operatorname{Ker}\widetilde{\partial}_0/\operatorname{Im}\widetilde{\partial}_1 = (A\otimes Q)/(A\otimes S) \cong A\otimes B$.

4.1.2 Caratteristica di Eulero

Sia $C \in \mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$ (complesso di catene in cui tutti i C_n sono gruppi abeliani. Supponiamo che i C_n siano finitamente generati e che $C_n = (0)$ per $n < 0$ e $n > N$. Possiamo quindi definire la *caratteristica di Eulero* di C come

$$\chi(C) = \sum_{u=0}^{N} (-1)^i \operatorname{rk} H_i(C).$$

Ricordiamo che il rango di un gruppo abeliano A finitamente generato è definito come $\operatorname{rk} A/T(A)$ dove $A/T(A)$ è libero perché finitamente generato e libero da torsione.

Osserviamo che $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} A$ ha una struttura di $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale dove l'azione di $\mathbb{Q}$ è definita (sui generatori) da $\lambda_1(\lambda\otimes b) = (\lambda_1\lambda)\otimes b$ (con $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{Q}$).

Lemma 51. Se A è un gruppo abeliano finitamente generato vale

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} A = \operatorname{rk} A.$$

Dimostrazione. Dalla seguente successione esatta

$$0 \longrightarrow T(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/T(A) \longrightarrow 0$$

ed usando il fatto che $A/T(A)$ è libero, si ha $A \cong A/T(A) \oplus T(A)$. Perciò $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} A \cong \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} A/T(A) \oplus \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} T(A) \cong \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} A/T(A)$. Dove $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} T(A) = (0)$ perché $T(A)$ è un gruppo di torsione.

Possiamo quindi supporre che A sia libero. Sia $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base di A. Mostriamo che $\{1 \otimes a_1, \ldots, 1 \otimes a_n\}$ è una base di $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ come $\mathbb{Q}$-spazio. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ è generato come gruppo abeliano dagli elementi

$$\frac{p}{q} \otimes a = \frac{p}{q} 1 \otimes a = \frac{p}{q} 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} n_i a_i \right) = \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{n} n_i (1 \otimes a_i),$$

e quindi $\{1 \otimes a_1, \ldots, 1 \otimes a_n\}$ generano $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ come $\mathbb{Q}$-spazio. Supponiamo di avere una relazione

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i} (1 \otimes a_i) = 0$$

allora detto $q = q_1 \cdots q_n$ abbiamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i'}{q} (1 \otimes a_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i' (1 \otimes a_i) = 0$$

e siccome la mappa $i : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A, n \otimes a \mapsto n \otimes a$ è iniettiva ($\operatorname{Ker} i = \operatorname{Tor}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = T(A) = 0$) e $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A$ è libero su $\{1 \otimes a_i\}$, abbiamo $p_i' = 0 \, \forall i \Rightarrow p_i = 0 \, \forall i$. □

Lemma 52. Se $0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow 0$ è successione esatta corta di gruppi abeliani finitamente generati, allora $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B + \operatorname{rk} C$

Dimostrazione. Ovvio usando il lemma precedente, il fatto che $\mathbb{Q}$ è piatto e l'analogo risultato per gli spazi vettoriali. □

Proposizione 53. Sia $C \in \mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}$ un complesso in cui i C_n sono finitamente generati e $C_n = 0$ per $n < 0$ ed $n > N$, allora

$$\chi(C) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^n \operatorname{rk} C_i$$

Dimostrazione. Consideriamo le successioni esatte (dove $Z_n = \operatorname{Ker} \partial_n$ e $B_{n-1} = \operatorname{Im} \partial_n$)

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow 0$$

allora $\operatorname{rk} C_n = \operatorname{rk} Z_n + \operatorname{rk} B_{n-1} = \operatorname{rk} H_n(C) + \operatorname{rk} B_n + \operatorname{rk} B_{n-1}$, da cui $\sum_{i=0}^{N} (-1)^i \operatorname{rk} C_i = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i (\operatorname{rk} H_i(C) + \operatorname{rk} B_i + \operatorname{rk} B_{i-1}) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \operatorname{rk} H_i(C) = \chi(C)$. □

4.1.3 Successione esatta lunga in omologia

Teorema 54. Siano $A, B, C \in \mathrm{Comp}_\Lambda$ e

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

successione esatta corta di complessi. Allora esiste un omomorfismo di Λ-moduli graduati di grado -1 $\omega : H_*(C) \to H_*(A)$ (detto *omomorfismo di connessione*) tale che la successione

$$\cdots \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C) \xrightarrow{\omega_n} \cdots$$

sia esatta.

Dimostrazione. Vediamo inanzitutto come costruire ω; consideriamo il seguente diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & B_n \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & B_{n-1} \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sia $[c] \in H_n(C)$ e $c = \psi_n(b)$; $0 = \partial_n \circ \psi_n(b) = \psi_{n-1} \circ \partial_n(b) \Rightarrow \partial_n(b) = \varphi_{n-1}(a)$ e definiamo $\omega_n([c]) = [a]$. È facile vedere che ω_n è omomorfismo. Per verificare che ω è ben definita dobbiamo dire che

(1) ω non dipende dalla preimmagine b di c,

(2) ω non dipende dal rappresentante $c \in [c]$.

Osserviamo che, scelti c e b, a è univocamente determinato perché φ_{n-1} è iniettiva.

(1) Sia $b' \in B_n$ tale che $\psi(b') = c$, allora $b' - b \in \operatorname{Ker} \psi_n = \operatorname{Im} \varphi_n$ e $b' = b + \varphi_n(a') \Rightarrow \partial_n b' = \partial_n b + \partial_n \circ \varphi_n(a') = \varphi_{n-1}(a) + \varphi_{n-1}(\partial_n a') = \varphi_{n-1}(a + \partial_n a')$ e $[a + \partial_n a'] = [a]$.

(2) Sia $c' = c + \partial_{n+1} c''$, allora $b' = b + \partial_{n+1} b''$ (dove $\psi_{n+1}(b'') = c''$) e $\partial_n b' = \partial_n b + \partial_{n+1} \circ \partial_n b = \partial_n b$.

Mostriamo che $\operatorname{Ker} \psi_* = \operatorname{Im} \varphi_*$, $\psi \circ \varphi = 0 \Rightarrow \psi_* \circ \varphi_* = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi_* \subseteq \operatorname{Ker} \psi_*$. Sia $[b] \in \operatorname{Ker} \psi_*$, allora $\psi_n(b) = \partial_{n+1} c' = \partial_{n+1} \psi_{n+1}(b') = \psi_n(\partial_{n+1} b')$ e $b = \varphi_n(a) + \partial_{n+1} b'$ da cui $[b] = [\varphi_n(a)] = \varphi_*([a])$.

Adesso vediamo che $\operatorname{Ker} \omega_n = \operatorname{Im} \psi_*$. Se $[c] = \psi([b])$ allora $\partial_n(b) = 0 \Rightarrow \omega_n([c]) = 0$. Sia invece $[c] \in \operatorname{Ker} \omega_n$, allora $a = \partial_n a'$ e $\partial_n b = \varphi_{n-1}(\partial_n a') =$

$\partial_n \varphi(a') \Rightarrow b - \varphi(a') \in \operatorname{Ker} \partial_n$ e $\psi(b - \varphi(a')) = \psi(b) = c$, cioè $[c] = \psi_*([b - \varphi(a')])$.

Rimane da vedere che $\operatorname{Im} \omega_n = \operatorname{Ker} \varphi_*$. Se $[c] \in H_n(C)$, $\varphi_* \circ \omega_n([c]) = \varphi_*([a]) = [\varphi_{n-1}(a)] = [\partial_n b] = 0$ e quindi $\operatorname{Im} \omega_n \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_*$. D'altra parte se $\varphi_*([a]) = 0$ allora $\varphi_{n-1}(a) = \partial_n b$ e $[a] = \omega_n([\varphi_n(b)])$. □

4.1.4 Successione Hom-Ext

Sia Λ un dominio ad ideali principali ed A, Λ-modulo sinistro e

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di Λ-moduli.

Prendiamo una presentazione proiettiva di A (che, dato che Λ è un PID è una risoluzione libera) $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$ applicando i funtori $\operatorname{Hom}(\cdot, B')$, $\operatorname{Hom}(\cdot, B)$ e $\operatorname{Hom}(\cdot, B'')$ al complesso

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

otteniamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & \text{grado } 0 & & \text{grado } 1 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C' & & 0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}(F, B') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(R, B') & \longrightarrow 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C & & 0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}(F, B) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(R, B) & \longrightarrow 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C'' & & 0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}(F, B'') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(R, B'') & \longrightarrow 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

dove le colonne sono esatte perché R ed F sono liberi (R è sottomodulo di libero e Λ è PID).

Abbiamo quindi costruito una successione esatta corta di complessi

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

da cui possiamo ottenere una successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^0(C') \longrightarrow H^0(C) \longrightarrow H^0(C'') \xrightarrow{\omega_0} H^1(C') \longrightarrow \\ H^1(C) \longrightarrow H^1(C'') \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Ora $H^0(C') = \mathrm{Hom}(A, B')$, $H^0(C) = \mathrm{Hom}(A, B)$, $H^0(C'') = \mathrm{Hom}(A, B'')$ ed $H^1(C') = \mathrm{Ext}\,(A, B')$, $H^1(C) = \mathrm{Ext}\,(A, B)$, $H^1(C'') = \mathrm{Ext}\,(A, B'')$ perciò possiamo riscrivere la successione come:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B'') \xrightarrow{\omega_0} \mathrm{Ext}\,(A, B') \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}\,(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}\,(A, B'') \longrightarrow 0$$

Questa successione è detta *successione Hom-Ext*. Se Λ non è ad ideali principali la successione continuerà con gli H^2 e cosí via.

Esercizio 12. Sia Λ dominio ad ideali principali

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

successione esatta di Λ-moduli,

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

presentazione proiettiva di A. Ricavare la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}\,(A, G') \longrightarrow \mathrm{Tor}\,(A, G) \longrightarrow \mathrm{Tor}\,(A, G'') \longrightarrow \\ A \otimes G' \longrightarrow A \otimes G \longrightarrow A \otimes G'' \longrightarrow 0$$

Dimostrazione. Applichiamo i funtori $\cdot \otimes_\Lambda G'$, $\cdot \otimes_\Lambda G$ e $\cdot \otimes_\Lambda G''$ al complesso di catene

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

ottenendo il seguente diagramma commutativo con colonne esatte (come prima R e P sono liberi):

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & \text{grado 1} & \text{grado 0} & \\
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
C' & 0 \arrow[r] & G' \otimes_\Lambda R \arrow[r] \arrow[d] & G' \otimes_\Lambda P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C & 0 \arrow[r] & G \otimes_\Lambda R \arrow[r] \arrow[d] & G \otimes_\Lambda P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C'' & 0 \arrow[r] & G'' \otimes_\Lambda R \arrow[r] \arrow[d] & G'' \otimes_\Lambda P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

che è una successione esatta esatta di complessi. Questa fornisce una successione esatta lunga in omologia:

$$0 \longrightarrow H_1(C') \longrightarrow H_1(C) \longrightarrow H_1(C'') \longrightarrow H_0(C') \longrightarrow H_0(C) \longrightarrow H_0(C'') \longrightarrow 0$$

e adesso basta osservare che $H_1(C') = \mathrm{Tor}_\Lambda(A, G')$, $H_1(C) = \mathrm{Tor}_\Lambda(A, G)$, $H_1(C'') = \mathrm{Tor}_\Lambda(A, G'')$, $H_0(C') = G' \otimes_\Lambda A$, $H_0(C) = G \otimes_\Lambda A$ e $H_0(C'') = G'' \otimes_\Lambda A$. □

Esercizio 13. Sia Λ dominio ad ideali principali, allora $\mathrm{Tor}\,(A, B) = \mathrm{Tor}\,(T(A), T(B))$.

Dimostrazione. Applichiamo la successione precedente alla successione esatta

$$0 \longrightarrow T(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/T(A) \longrightarrow 0$$

ma $A/T(A)$ è libero da torsione e quindi (Λ è PID) è piatto. Perciò otteniamo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_\Lambda(T(A), B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_\Lambda(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_\Lambda(A/T(A), B) = 0$$

e $\mathrm{Tor}_\Lambda(A, B) \cong \mathrm{Tor}_\Lambda(T(A), B)$ ed analogamente abbiamo $\mathrm{Tor}_\Lambda(T(A), B) \cong \mathrm{Tor}_\Lambda(T(A), T(B))$. □

4.2 Omotopia

07/04/08

Siano C e D due complessi di catene e $\varphi, \psi : C \to D$ morfismi di complessi. Vogliamo trovare delle condizioni sufficienti affinché sia $\varphi_* = \psi_* : H(C) \to H(D)$.

Definizione 39. Siano C e D due complessi di catene e $\varphi, \psi : C \to D$ morfismi di complessi. Un'omotopia tra φ e ψ è un morfismo di Λ-moduli graduati $\Sigma : C \to D$ di grado 1 tale che

$$\psi - \varphi = \partial \circ \Sigma + \Sigma \circ \partial.$$

Cioè per ogni $n \in \mathbb{Z}$ $\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1} \circ \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \circ \partial_n$.

Un possibile modo di presentare l'omotopia è il seguente; consideriamo lo $\mathbb{Z}$-modulo graduato $\{\mathrm{Hom}(C, D)_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dove $\mathrm{Hom}(C, D)_n$ è il gruppo dei morfismi di Λ-moduli graduati di grado n; vogliamo definire un operatore di bordo. Sia $f_\nu : C_n \to D_{n+\nu}$ un morfismo di grado ν. Definiamo $\partial f_\nu = \partial \circ f_\nu + (-1)^{n+1} f_\nu \circ \partial$ (il $(-1)^{n+1}$ serve per garantire che $\partial \circ \partial = 0$). Vediamo cos'è $Z_0(\mathrm{Hom}(C, D), \partial)$ (cioè chi sono i cicli in $\mathrm{Hom}(C, D)_0$). Sia $f_0 \in \mathrm{Hom}(C, D)_0$ allora $\partial f_0 = \partial f_0 - f_0 \partial$ perciò i cicli sono i morfismi di grado 0 che commutano con l'operatore di bordo, cioè i morfismi di complessi $C \to D$. Ora ci chiediamo quand'è che due morfismi di complessi φ e ψ coincidono in $H_0(\mathrm{Hom}(C, D))$? $[\varphi] = [\psi] \Leftrightarrow \exists s : C \to D$ morfismo di grado 1 con $\varphi - \psi = \partial s = \partial \circ s + (-1)^2 s \circ \partial = \partial \circ s + s \circ \partial \Leftrightarrow \varphi \cong \psi$ (cioè φ e ψ sono omotopi).

Proposizione 55. Se φ e ψ sono omotope allora $H(\varphi) = H(\psi) : H(C) \to H(D)$.

Dimostrazione. $[z] \in H_n(C) \Rightarrow z \in \mathrm{Ker}\, \partial_n$; $\varphi_n - \psi_n = \Sigma \circ \partial(z) + \partial \circ \Sigma(z) = \partial \circ \Sigma(z) \in B_n(C)$. □

In topologia algebrica spesso per dimostrare che un certo complesso ha omologia nulla si dimostra che l'identità è omotopa all'omomorfismo nullo. L'essere omotopi è una relazione d'equivalenza.

Osservazione 24. Sia $F : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ un funtore additivo, $C, D \in \mathrm{Comp}_\Lambda$ e $\varphi \cong \psi : C \to D$. Allora $F(\varphi), F(\psi) : F(C) \to F(D)$ sono omotope e se Σ è omotopia tra φ e ψ $F(\Sigma)$ è omotopia tra $F(\varphi)$ e $F(\psi)$.

Dimostrazione. $\varphi - \psi = \partial \circ \Sigma + \Sigma \circ \partial \Rightarrow F(\varphi) - F(\psi) = F(\partial) \circ F(\Sigma) + F(\Sigma) \circ F(\partial)$. In particolare vale $H(F(\varphi)) = H(F(\psi))$. □

Definizione 40. Due complesi C, D *hanno lo stesso tipo di omotopia* se esistono due morfismi di complessi $\varphi : C \to D$ e $\vartheta : D \to C$ tali che $\vartheta \circ \varphi \cong id_C$ e $\varphi \circ \vartheta \cong id_D$.

In tal caso $H(C) \cong H(D)$ e $H(\varphi)$ e $H(\vartheta)$ sono isomorfismi.

Esempio 18. Esibiamo due morfismi di complessi che inducono la stessa mappa in omologia ma che non sono omotopi. Consideriamo i complessi

$$\begin{tikzcd}
 & & C_1 & C_0 & & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p"] \arrow[d, "\varphi"', "\psi"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"', "\psi"] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
 & & D_1 & D_0 & &
\end{tikzcd}$$

Dove $\varphi_1 = id$ e $\psi_1 = 0$. φ e ψ inducono la stessa mappa in omologia. Applichiamo il funtore additivo $\cdot \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, se φ e ψ fossero omotope lo sarebbero anche $\cdot \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(\varphi)$ e $\cdot \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(\psi)$ ma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\cdot\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(\varphi)"', "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e le due mappe non possono essere omotope perché i complessi ottenuti applicando $\cdot \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(\cdot)$ non hanno omologia nulla.

4.3 Funtori derivati

Sia $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ un funtore additivo. Vogliamo costruire una famiglia di funtori L_nT.

Definizione 41. Sia A un Λ-modulo; una *risoluzione proiettiva* di A è un complesso

$$P = \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\vartheta} P_0 \longrightarrow 0$$

tale che

(1) I P_j sono proiettivi.

(2) $\mathrm{coKer}\,\vartheta = H_0(P) \cong A$.

(3) Per ogni $n \geq 1$ la successione è esatta in P_n.

Si dice che P è un *complesso aciclico*. Se applichiamo T alla risoluzione proiettiva otteniamo il complesso

$$TP = \cdots \longrightarrow TP_n \longrightarrow \cdots \qquad TP_2 \longrightarrow TP_1 \xrightarrow{\vartheta} TP_0 \longrightarrow 0$$

che non è più aciclico e possiamo considerarne l'omologia. Definiamo $L_nT(A) = H_n(TP)$. L_nT sarà un funtore e si chiamerà n-esimo funtore derivato sinistro di T. Analogamente si definiscono i funtori derivati destri (dove T è controvariante e invece dell'omologia si prende la coomologia, oppure T è covariante ma invece delle risoluzioni proiettive si usano le risoluzioni iniettive).

Esempio 19. Sia Λ un PID ed A un Λ-modulo. Allora se

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

è una presentazione proiettiva di A

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

è una risoluzione proiettiva di A a cui possiamo applicare il funtore additivo (controvariante) $T = \mathrm{Hom}(\cdot, B)$ ottenendo il complesso

$$D = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_1, B) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

e considerare il funtore derivato destro $R^nT(A) = H^n(D)$. Abbiamo quindi che $\mathrm{Ext}\,(A, B) = R^1T(A)$ e in generale $\mathrm{Ext}\,(\cdot, B) = R^1T$.

4.3.1 Risoluzioni

Definizione 42. Un complesso $C = \{C_n\}$ si dice *complesso positivo* se $C_n = 0$ per ogni $n < 0$; si dice *complesso aciclico* se $H_n(A) = 0$ per ogni $n \geq 1$ e si dice *complesso proiettivo* se tutti i C_n sono proiettivi.

Quindi una risoluzione proiettiva di un Λ-modulo A è un complesso P positivo aciclico e proiettivo con $H_0(P) \cong A$.

Teorema 56. Sia C un complesso positivo, aciclico e proiettivo e D un complesso positivo e aciclico. Allora per ogni $\varphi : H_0(C) \to H_0(D)$ esiste una mappa di complessi $\overline{\varphi} : C \to D$ che solleva φ. Inoltre due tali mappe sono omotope.

Dimostrazione. Mostriamo la tesi per induzione su n; φ si solleva a $\varphi_0 : C_0 \to D_0$ perché C_0 è proiettivo. Supponiamo di avere $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ dove φ_k solleva φ_{k-1}.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & C_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & H_0(C) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D_1 \arrow[r] & D_0 \arrow[r, "\widetilde{\pi}"'] & H_0(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ora $\widetilde{\partial}_{n-1} \circ \varphi_{n-1} \circ \partial_n = \varphi_{n-2} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ e quindi $\operatorname{Im} \varphi_{n-1} \circ \partial_n \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_{n-1} = \operatorname{Im} \widetilde{\partial}_n$ (dove l'ultima uguaglianza viene dal fatto che il complesso è acicilico). Perciò possiamo costruire il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
& C_n \arrow[dl, dashed, "\varphi_n"'] \arrow[d, "\varphi_{n-1} \circ \partial_n"] & \\
D_n \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"'] & \operatorname{Im} \widetilde{\partial}_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e sollevare a φ_n per proiettività.

Siano $\psi, \xi : C \to D$ che sollevano φ; mostriamo, sempre per induzione, che esiste un'omotopia $\Sigma : C \to D$ tale che $\widetilde{\partial}_{n+1} \circ \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \circ \partial_n = \psi_n - \xi_n$. Definiamo $\Sigma_{-1} = 0$, sappiamo che $\widetilde{\pi} \circ (\psi_0 - \xi_0) = (\varphi - \varphi) \circ \pi = 0$ e quindi $\operatorname{Im} \psi_0 - \xi_0 \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{\pi} = \operatorname{Im} \partial_1$ e possiamo considerare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\psi_1 - \xi_1"'] & C_0 \arrow[dl, dashed, "\Sigma_0"'] \arrow[d, "\psi_0 - \xi_0"] & \\
D_1 \arrow[r, "\widetilde{\partial}_1"'] & \operatorname{Im} \widetilde{\partial}_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove $\psi_0 - \xi_0$ si solleva a Σ_0 per proiettività di C_0. Quindi $\widetilde{\partial}_1 \circ \Sigma_0 = \psi_0 - \xi_0$.

Vediamo il passo induttivo;

$$\begin{tikzcd}
& C_n \arrow[dl, dashed, "\Sigma_n"'] \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\psi_n - \xi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "\Sigma_{n-1}"] \arrow[d, "\psi_{n-1} - \xi_{n-1}"] & \cdots \\
D_{n+1} \arrow[r, "\widetilde{\partial}_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ora $\widetilde{\partial}_n \circ ((\psi_n - \xi_n) - \Sigma_{n-1} \circ \partial_n) = \widetilde{\partial}_n \circ (\psi_n - \xi_n) - (\widetilde{\partial}_n \circ \Sigma_{n-1}) \circ \partial_n = (\psi_{n-1} - \xi_{n-1}) \circ \partial_n - (\psi_{n-1} - \xi_{n-1} - \Sigma_{n-2} \circ \partial_{n-1}) \circ \partial_n = 0$. Perciò, detto $\eta = (\psi_n - \xi_n) - \Sigma_{n-1} \circ \partial_n$ $\operatorname{Im} \eta \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n = \operatorname{Im} \widetilde{\partial}_{n+1}$ e per proiettività si solleva a $\Sigma_n : C_n \to D_{n+1}$. □

08/04/08

L'esistenza delle risoluzioni proiettive è equivalente all'esistenza delle presentazioni proiettive (questo è vero in generale per ogni categoria abeliana).

Infatti consideriamo le presentazioni proiettive

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow R_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow R_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow R_1 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow R_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow R_2 \longrightarrow 0 \\ \vdots \end{array}$$

Possiamo costruire una risoluzione proiettiva nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & P_2 \arrow[rr, dashed, "\partial_2"] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr, dashed, "\partial_1"] \arrow[dr] & & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
& & R_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & R_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Se invece abbiamo una risoluzione proiettiva basta considerare

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} \partial_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

che è una presentazione proiettiva. Un discorso completamente analogo vale per le presentazioni e le risoluzioni iniettive.

Proposizione 57. Due risoluzioni proiettive di A hanno lo stesso tipo di omotopia.

Dimostrazione. Siano P e Q due risoluzioni proiettive di A; allora per il teorema 56 $id : A \to A$ si solleva a $\varphi : P \to Q$ ed a $\psi : Q \to P$ e, sempre per lo stesso teorema, $\psi \circ \varphi \sim id_P$ e $\varphi \circ \psi \sim id_Q$. $\square$

Definizione 43. Sia A un Λ-modulo, una *risoluzione iniettiva* di A è un complesso di cocatene

$$0 \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \cdots$$

aciclico, iniettivo tale che $H^0(C) \cong A$.

In modo del tutto analogo al teorema 56 si dimostra il seguente:

Teorema 58. Siano C e D complessi di cocatene positivi e aciclici e D iniettivo; allora per ogni morfismo $\varphi : H^0(C) \to H^0(D)$ esiste un sollevamento $\psi : C \to D$ unico a meno di omotopia.

Siano $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ funtore covariante additivo e

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

una risoluzione proiettiva di A; allora possiamo costruire il complesso

$$\cdots \longrightarrow TP_2 \longrightarrow TP_1 \longrightarrow TP_0 \longrightarrow TA \longrightarrow 0$$

e definire $L_nT(A) = H_n(TP)$. Vogliamo mostrare che L_nT è un funtore $\mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ e che la definizione data non dipende dalla risoluzione proiettiva scelta. Sia $\alpha : A \to A'$ morfismo in $\mathfrak{M}^l_\Lambda$, consideriamo due risoluzioni proiettive (di A ed A').

$$\begin{tikzcd}
P = & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
P' = & \cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

per il teorema 56 α si solleva ad un morfismo di complessi $\widetilde{\alpha} : P \to P'$. Ora T è un funtore additivo e quindi induce un funtore $T : \mathrm{Comp}_\Lambda \to \mathrm{Comp}_\mathbb{Z}$ e possiamo considerare il morfismo $T\widetilde{\alpha} : TP \to TP'$. $L_nT\cdot$ associa ad α il morfismo $(T\widetilde{\alpha}_n)_* : H_n(TP) \to H_n(TP')$. Osserviamo che questo morfismo non dipende dal sollevamento $\widetilde{\alpha}$ scelto, infatti sappiamo che due tali sollevamenti sono omotopi e T preserva le relazioni di omotopia (per addittività). Quindi due sollevamenti di α inducono lo stesso morfismo in omologia.

Se $\alpha : A \to A'$ chiamiamo $\alpha(P, P') : H(TP) \to H(TP')$ il morfismo associato e si verifica facilmente che, dato $\alpha' : A' \to A''$ $(\alpha' \circ \alpha)(P, P'') = \alpha'(P', P'') \circ \alpha(P, P')$ e $1_A(P, P) = 1_{L_nT(A)}$.

Proposizione 59. Siano P e Q risoluzioni proiettive di A, allora c'è un isomorfismo $\eta_{PQ} : L^P_nT(A) \to L^Q_nT(A)$ e l'isomorfismo è canonico.

Dimostrazione. Siano $\eta : P \to Q$ e $\xi : Q \to P$ che sollevano $id : A \to A$; η è un'equivalenza omotopica tra i complessi P e Q, perciò $T\eta$ è equivalenza omotopica tra TP e TQ (perché T è additivo).

Inoltre, se Γ è un'altra risoluzione proiettiva, $\eta_{Q\Gamma} \circ \eta_{PQ} \sim \eta_{P\Gamma}$ ed $\eta_{PP} \sim id$ (perciò diciamo che l'isomorfismo è canonico). $\square$

Per quanto abbiamo visto possiamo dire che associando ad un morfismo $\alpha : A \to A'$ il morfismo $\alpha(P, P') : L_nT(A) \to L_nT(A')$ otteniamo un funtore $L_nT : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$.

4.3.2 Prima successione esatta lunga per i funtori derivati

Lemma 60. Siano

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

successione esatta corta, $\varepsilon' : P' \to A' \to 0$ ed $\varepsilon'' : P'' \to A'' \to 0$ con P' e P'' proiettivi; allora detto $P = P' \oplus P''$ esiste $\varepsilon : P \to A$ tale che il seguente diagramma sia commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per proiettività esiste $\gamma : P'' \to A$ tale che $\psi \circ \gamma = \varepsilon''$. Definiamo $\varepsilon(a, b) = \varphi \circ \varepsilon'(a) + \gamma(b)$; ora il diagramma commuta ed ε è surgettiva per il teorema 1 (non è nell'enunciato ma si deduce dalla dimostrazione). $\square$

Lemma 61 (del serpente)**.** Consideriamo il diagramma esatto e commutativo

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"'] & B' \arrow[r, "\psi"'] & C' &
\end{tikzcd}$$

Allora esiste un morfismo $\operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{coKer}\alpha$ tale che la successione

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\xi} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\eta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\omega} \operatorname{coKer}\alpha \xrightarrow{\varphi} \operatorname{coKer}\beta \xrightarrow{\psi} \operatorname{coKer}\gamma$$

sia esatta.

Dimostrazione. Osserviamo che $\beta \circ \xi = \varphi \circ \alpha \Rightarrow \xi(\operatorname{Ker}\alpha) \subseteq \operatorname{Ker}\beta$ e allo stesso modo $\gamma \circ \eta = \psi \circ \beta \Rightarrow \eta(\operatorname{Ker}\beta) \subseteq \operatorname{Ker}\gamma$.

Sia $b \in \operatorname{Ker}\eta_{|\operatorname{Ker}\beta}$, $b = \xi(a)$ e $\varphi \circ \alpha(a) = \beta \circ \xi(a) = 0 \Rightarrow$ (φ iniettiva) $a \in \operatorname{Ker}\alpha$; e quindi la successione è esatta in $\operatorname{Ker}\beta$.

Osserviamo che $\varphi(\operatorname{Im}\alpha) \subseteq \operatorname{Im}\beta$ e $\psi(\operatorname{Im}\beta) \subseteq \operatorname{Im}\gamma$ e quindi φ e ψ inducono i morfismi $\varphi : \operatorname{coKer}\alpha \to \operatorname{coKer}\beta$ e $\psi : \operatorname{coKer}\beta \to \operatorname{coKer}\gamma$. Sia $[b'] \in \operatorname{Ker}\psi$, allora $\psi(b') = \gamma(c) =$ (η surgettiva) $\gamma \circ \eta(b) = \psi \circ \beta(b) \Rightarrow b' = \beta(b) + \varphi(a')$ e $[b'] = [\varphi(a')] = \varphi([a'])$; cioè la successione è esatta in $\mathrm{coKer}\,\beta$.

Vediamo come costruire ω. Sia $c \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, $c = \eta(b) \Rightarrow \psi \circ \beta(b) = \gamma \circ \eta(b) = 0 \Rightarrow \beta(b) = \varphi(a')$ e definiamo $\omega(c) = [a']$. Osserviamo che $\omega(c)$ non dipende da b, infatti se $\eta(b_1) = \eta(b)$ allora $b_1 - b \in \mathrm{Ker}\,\eta \Rightarrow b_1 = b + \xi(a)$ e $\beta(b_1) = \beta(b) + \beta \circ \xi(a) = \varphi(a') + \varphi \circ \alpha(a) = \varphi(a' + \alpha(a))$ e $[a' + \alpha(a)] = [a']$. Inoltre si vede facilmente che ω è omomorfismo.

Sia $c \in \mathrm{Ker}\,\omega$, allora $a' = \alpha(a)$ e $\beta \circ \xi(a) = \varphi \circ \alpha(a) = \varphi(a') = \beta(b) \Rightarrow b_1 = b - \xi(a) \in \mathrm{Ker}\,\beta$ e $\eta(b_1) = \eta(b) = c$. Inoltre se $c = \eta(b)$ con $b \in \mathrm{Ker}\,\beta$, allora $\beta(b) = 0 = \varphi(0) \Rightarrow \omega(c) = 0$ e la successione è esatta in $\mathrm{Ker}\,\gamma$.

Sia $[a] \in \mathrm{coKer}\,\alpha$ con $\varphi([a]) = 0$, allora $\varphi(a) = \beta(b)$ e $[a] = \omega([\eta(b)])$; se invece $[a] = \omega(c)$ allora $\varphi([a]) = [\beta(b)] = 0$ e la successione è esatta in $\mathrm{coKer}\,\alpha$. □

Teorema 62. Siano $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ funtore additivo e

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

successione esatta corta; allora esiste un *omomorfismo di connessione* $\omega_n : L_nTA'' \to L_{n-1}TA'$ tale che la seguente successione sia esatta.

$$L_nTA' \longrightarrow L_nTA \longrightarrow L_nTA'' \xrightarrow{\omega_n} L_{n-1}TA' \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0TA'' \longrightarrow 0$$

Dimostrazione. Fissiamo P' e P'' risoluzioni proiettive di A' ed A'', per il lemma 60 possiamo costruire il diagramma commutativo ed esatto

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r] \arrow[d] & P_1' \oplus P_1'' \arrow[r] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Per il lemma del serpente (osservando che le mappe sono surgettive e quindi i conuclei sono nulli) si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varepsilon' \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varepsilon \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varepsilon'' \longrightarrow 0$$

e possiamo ripetere la costruzione ottenendo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r] \arrow[d] & P_1' \oplus P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varepsilon' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\varepsilon \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\varepsilon'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

e con un ragionamento induttivo si costruisce una risoluzione proiettiva di A e, più importante, una successione esatta corta di risoluzioni

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$$

Ora applicando T la successione rimane esatta perché $P = P' \oplus P''$ (cioè la successione spezza) e T è funtore additivo e quindi preserva le somme dirette di due oggetti. Perciò non resta che estrarre una successione esatta lunga in omologia per ottenere la tesi. $\square$

Esempio 20. Sia $T = \mathrm{Hom}(\cdot, B)$, P risoluzione proiettiva di A. Applicando T otteniamo il complesso

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_1, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_2, B) \longrightarrow \cdots$$

ed in questo caso definiamo $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B) = R^nT(A) = R^n\mathrm{Hom}(\cdot, B)(A)$.

Se abbiamo una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

dal teorema precedente ricaviamo una successione esatta lunga

$$\cdots \xrightarrow{\omega_{n-1}} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A'', B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A', B)$$
$$\xrightarrow{\omega_n} \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(A'', B) \longrightarrow \cdots$$

Ma siccome il funtore $\mathrm{Hom}(\cdot, B)$ è esatto a sinistra $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ mentre $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) = \mathrm{Ext}_\Lambda(A, B)$ e da queste osservazioni si ricava la successione Hom-Ext per il caso in cui Λ non sia un dominio ad ideali principali.

Proposizione 63. Sia

$$0 \longrightarrow K_q \xrightarrow{\mu} P_{q-1} \longrightarrow P_{q-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

successione esatta con i P_j proiettivi; sia T un funtore additivo covariante *esatto a destra* (ad esempio $\cdot \otimes B$). Se $q \geq 1$ la successione

$$0 \longrightarrow L_qT(A) \longrightarrow TK_q \xrightarrow{T\mu} TP_{q-1}$$

è esatta e in particolare $L_qT(A) \cong \operatorname{Ker} T\mu$.

Dimostrazione. Possiamo costruire una risoluzione proiettiva in modo da avere il seguente diagramma esatto

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_q \arrow[rr, "\partial_q"] \arrow[dr] & & P_{q-1} \arrow[r] & P_{q-2} \arrow[r] & \cdots \\
& & K_q \arrow[ur, "\mu"'] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Poiché il funtore è esatto a destra possiamo costruire il seguente diagramma commutativo ed esatto

$$\begin{tikzcd}
& TP_{q+1} \arrow[r, "T\partial_{q+1}"] \arrow[d] & TP_q \arrow[r] \arrow[d, "T\partial_q"'] & TK_q \arrow[r] \arrow[d, "T\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TP_{q-1} \arrow[r, equal] & TP_{q-1} &
\end{tikzcd}$$

Applicando il lemma del serpente otteniamo una successione esatta

$$TP_{q+1} \xrightarrow{T\partial_{q+1}} \operatorname{Ker} T\partial_q \longrightarrow \operatorname{Ker} T\mu \longrightarrow 0$$

E quindi $\operatorname{Ker} T\mu \cong H_q(T(A)) = L_qT(A)$. □

Osservazione 25. Vale anche la proposizione duale. Cioè se T è un funtore additivo controvariante esatto a sinistra (come $\operatorname{Hom}_\Lambda(\cdot, B)$) e

$$0 \longrightarrow K_q \xrightarrow{\mu} P_{q-1} \longrightarrow P_{q-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

è esatta con i P_j proiettivi, allora

$$TP_{q-1} \xrightarrow{T\mu} TK_q \longrightarrow R^qTA \longrightarrow 0$$

è esatta e in particolare $R^qTA \cong \operatorname{coKer} T\mu$.

Esercizio 14. Dimostrare che $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \cong \mathrm{Ext}_\Lambda(A,B)$

Dimostrazione. Si considera una presentazione proiettiva

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mu} P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

e utilizzando la duale della proposizione precedente (con $T = \mathrm{Hom}(\cdot, B)$) si ha che $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \cong \mathrm{coKer}\,\mu^* = \mathrm{Ext}_\Lambda(A,B)$. □

4.3.3 Seconda successione esatta lunga per i funtori derivati

21/04/08

Definizione 44. Una successione $T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T''$ di funtori additivi $T, T', T'' : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ e trasformazioni naturali τ', τ'' si dice *esatta sui proiettivi* se $\forall P \in \mathfrak{M}_\Lambda$ proiettivo la successione

$$0 \longrightarrow T'P \xrightarrow{\tau'_P} TP \xrightarrow{\tau''_P} T''P \longrightarrow 0$$

è esatta.

Teorema 64 (Seconda successione esatta lunga)**.** Sia $T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T''$ successione esatta sui proiettivi. Allora per ogni $A \in \mathfrak{M}_\Lambda$ esistono gli omomorfismi di connessione $\omega_n : L_nT''A \to L_{n-1}T'A$ tali che la successione

$$L_nT'A \longrightarrow L_nTA \longrightarrow L_nT''A \xrightarrow{\omega_n} L_{n-1}T'A \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1T''A \xrightarrow{\omega_1} L_0T'A$$
$$\longrightarrow L_0TA \longrightarrow L_0T''A \longrightarrow 0$$

sia esatta.

Dimostrazione. Sia

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

una risoluzione proiettiva di A; allora possiamo costruire il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & T'P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\tau'_{P_1}"'] & T'P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\tau'_{P_0}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & TP_1 \arrow[r] \arrow[d, "\tau''_{P_1}"'] & TP_0 \arrow[r] \arrow[d, "\tau''_{P_0}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & T''P_1 \arrow[r] \arrow[d] & T''P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

che è una successione esatta di complessi e quindi basta prendere la successione esatta lunga in omologia. □

Esercizio 15. Ricavare, usando la seconda successione esatta lunga e data la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\nu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \longrightarrow 0$$

la successione esatta

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B') \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B'') \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(A, B') \longrightarrow \cdots$$

Dimostrazione. Le mappe ν ed ε inducono delle trasformazioni naturali $\nu_* : \operatorname{Hom}(\cdot, B') \to \operatorname{Hom}(\cdot, B)$, $\varepsilon_* : \operatorname{Hom}(\cdot, B) \to \operatorname{Hom}(\cdot, B'')$. Dove $\nu^A_*(\varphi) = \nu \circ \varphi \in \operatorname{Hom}(A, B)$ e $\varepsilon^A_*(\psi) = \varepsilon \circ \psi \in \operatorname{Hom}(A, B'')$. Inoltre sappiamo già che la successione

$$\operatorname{Hom}(\cdot, B) \xrightarrow{\nu_*} \operatorname{Hom}(\cdot, B') \xrightarrow{\varepsilon_*} \operatorname{Hom}(\cdot, B'')$$

è esatta sui proiettivi (teorema 11). Perciò basta considerare la seconda successione esatta lunga sulla successione appena descritta. □

Ancora su $\operatorname{Ext}^n_\Lambda$ Fino ad ora abbiamo costruito $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, B)$ con una risoluzione proiettiva P di A, applicando il funtore additivo $\operatorname{Hom}(\cdot, B)$ e considerando la coomologia del complesso $\operatorname{Hom}(\cdot, B)(P)$.

Ma possiamo calcolare $\operatorname{Ext}_\Lambda$ anche con una risoluzione iniettiva di B; sia

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots$$

risoluzione iniettiva, applicando $\mathrm{Hom}(A,\cdot)$ otteniamo il complesso $\mathrm{Hom}(A,\cdot)(I)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, I_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, I_1) \longrightarrow \cdots$$

e definiamo $\overline{\mathrm{Ext}}^{\,n}_{\Lambda}(A,B) = H^n(Hom(A,\cdot)(I))$. I funtori $\mathrm{Ext}^{\,n}_{\Lambda}$ e $\overline{\mathrm{Ext}}^{\,n}_{\Lambda}$ risultano naturalmente equivalenti.

Si dice che il bifuntore $\mathrm{Ext}_{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ è *bilanciato*, cioè

$$R^n(\mathrm{Hom}(A,\cdot))(B) = R^n(\mathrm{Hom}(\cdot, B))(A).$$

Il funtore Tor^{Λ}_n Siano $A \in \mathfrak{M}^r_\Lambda, B \in \mathfrak{M}^l_\Lambda$, definiamo $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A,B) = L_n(A\otimes_\Lambda \cdot)(B)$. Consideriamo una risoluzione proiettiva di B

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

e consideriamo il complesso ottenuto applicando $A\otimes_\Lambda \cdot$:

$$\cdots \longrightarrow A\otimes_\Lambda P_2 \longrightarrow A\otimes_\Lambda P_1 \longrightarrow A\otimes_\Lambda P_0 \longrightarrow 0$$

allora $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A,B) = H_n((A\otimes_\Lambda \cdot)(P))$. Se P è proiettivo una risoluzione proiettiva di P è il complesso $0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$ dove P è il modulo di grado 0. Quindi se $n \geq 1$ $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(P,B) = 0$.

Calcoliamo $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_0(A,B)$; $A\otimes_\Lambda \cdot$ è esatto a destra e quindi la successione

$$A\otimes_\Lambda P_1 \xrightarrow{\varepsilon} A\otimes_\Lambda P_0 \longrightarrow A\otimes_\Lambda B \longrightarrow 0$$

è esatta e $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_0 = H_0((A\otimes_\Lambda \cdot)(P)) = \mathrm{coKer}\,\varepsilon = A\otimes_\Lambda B$.

Il funtore $\cdot\otimes_\Lambda B$ è esatto a destra, perciò usando la proposizione 63 si ha subito che $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_1(A,B) \cong \mathrm{Tor}_{\Lambda}(A,B)$.

Esercizio 16. Scrivere le due successioni esatte lunghe per Tor^{Λ}_n.

Dimostrazione. Se $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ è esatta, la prima successione esatta lunga per i funtori derivati fornisce:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n+1}(A'',B) \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A',B) \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A,B) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A'',B) \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n-1}(A',B) \longrightarrow \cdots$$

Mentre se $0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\nu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \longrightarrow 0$ è esatta allora la successione

$$\cdot\otimes_\Lambda B' \xrightarrow{\nu_*} \cdot\otimes_\Lambda B \xrightarrow{\varepsilon_*} \cdot\otimes_\Lambda B''$$

è esatta sui proiettivi e la seconda successione esatta lunga per i funtori derivati fornisce

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n+1}(A,B'') \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A,B') \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A,B) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A,B'') \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n-1}(A,B') \longrightarrow \cdots$$

□

Capitolo 5

Omologia e coomologia di gruppi

Definizione 45. Dato un gruppo G ed uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo A, definiamo la *coomologia di G a coefficienti in A* come

$$H^n(G, A) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$$

dove $\mathbb{Z}$ è lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale, cioè G agisce banalmente su $\mathbb{Z}$.

Osserviamo che un'azione $G \to \operatorname{Aut} A$ su di un gruppo abeliano A si estende in modo naturale ad un omomorfismo $\mathbb{Z}[G] \to \operatorname{End} A$ ed A ha una struttura di $\mathbb{Z}[G]$-modulo; viceversa se A è uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo abbiamo un'azione $G \to \operatorname{Aut} A$; infatti sia per ogni $g \in G$ $\varphi_g : a \mapsto ga$ allora $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = id$ e quindi $\varphi_g \in \operatorname{Aut} A$. Però anche se l'azione di G su A è banale non è detto che $\mathbb{Z}[G]$ agisca su A come l'identità.

Definizione 46. Dato un gruppo G ed uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo destro B, definiamo l'*omologia di G a coefficienti in A* come

$$H_n(G, B) = \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}[G]}_n(B, \mathbb{Z})$$

dove $\mathbb{Z}$ è lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale.

Sia $\sum_{g\in G} m_g g \in \mathbb{Z}[G]$ e sia $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ l'omomorfismo

$$\begin{gathered} \mathbb{Z}[G] \to \operatorname{End}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \\ \sum_{g\in G} m_g g \mapsto \left(n \mapsto \left(\sum_{g\in G} m_g g\right) n\right) \mapsto \sum_{g\in G} m_g \end{gathered}$$

Dove $\left(\sum_{g\in G} m_g g\right) n = \left(\sum_{g\in G} m_g\right) n$ perché G agisce banalmente su $\mathbb{Z}$. La mappa ε si dice *augmentazione* e $\operatorname{Ker}\varepsilon = IG$ si chiama *ideale di augmentazione*. Osserviamo che per ogni $g \in G$, $g - e \in IG$.

Teorema 65. (1) IG è il gruppo libero abeliano sull'insieme

$$W = \{g - 1 : g \in G, g \neq e\}.$$

(2) IG è generato, come $\mathbb{Z}[G]$-modulo da

$$S = \{s - 1 : s \text{ è generatore di } G\}.$$

Dimostrazione. (1) È chiaro che $\varepsilon\left(\sum_{g\in G} m_g(g-1)\right) = 0$ e quindi $\langle W\rangle \subseteq IG$. Se $\varepsilon\left(\sum_{g\in G} m_g g\right) = 0$ allora $\sum_{g\in G} m_g = 0$, perciò $\sum_{g\in G} m_g g = \sum_{g\in G} m_g g - \sum_{g\in G} m_g 1 = \sum_{g\in G} m_g(g-1)$ e quindi $IG = \langle W\rangle$ e poi è chiaro che gli elementi di W sono indipendenti.

(2) Mostriamo che S genera gli elementi di W (come combinazioni di elementi di $\mathbb{Z}[G]$). Se $x, y \in G$, allora $xy-1 = x(y-1)+(x-1) \in \langle x-1, y-1\rangle_{\mathbb{Z}[G]}$ e $x^{-1} - 1 = -x^{-1}(x-1) \in \langle x-1\rangle_{\mathbb{Z}[G]}$, da cui la tesi.

□

Osservazione 26. Se $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ è una successione esatta corta di $\mathbb{Z}[G]$-moduli, applicando la seconda successione esatta lunga per i funtori derivati ricaviamo la successione

$$0 \longrightarrow H^0(G,A') \longrightarrow H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G,A'') \longrightarrow H^1(G,A') \longrightarrow \cdots$$

ed applicando la prima successione esatta lunga per i funtori derivati otteniamo

$$H_n(G,A') \longrightarrow H_n(G,A) \longrightarrow H_n(G,A'') \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(G,A'') \longrightarrow 0$$

Osservazione 27. Se A è iniettivo, $H^n(G,A) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$ e quindi per ogni $n \geq 1$ $H^n(G,A) = (0)$.

Analogamente se B è proiettivo (ma basta piatto perché sappiamo che Tor si può calcolare con le risoluzioni piatte) $H_n(G;B) = \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}[G]}_n(B,\mathbb{Z}) = (0)$ per ogni $n \geq 1$.

Calcoliamo H_0 ed H^0. Sappiamo già che $H^0(G,A) = \operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$.

Sia $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},A)$ (un omomorfismo di $\mathbb{Z}[G]$-moduli è comunque un omomorfismo di gruppi abeliani); deve valere $\varphi(g) = \varphi(g\cdot 1) = g\varphi(1)$. Ma $\mathbb{Z}$ è lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale, perciò $\varphi(1) = g\varphi(1)$ $\forall g \in G$; da cui

$$H^0(G,A) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \cong A^G = \{x \in A : gx = x \,\forall g \in G\}.$$

Dove gli elementi di A^G sono detti *invarianti del modulo*.

$$H_0(G,B) = \operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathbb{Z}) = B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$$

per definizione di tensore G deve agire a destra su B e a sinistra su $\mathbb{Z}$ e deve valere

$$\forall b \in B, g \in G \quad bg \otimes_{\mathbb{Z}[G]} 1 = b \otimes_{\mathbb{Z}[G]} g \cdot 1 = b \otimes_{\mathbb{Z}[G]} 1.$$

e quindi

$$B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} = B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\langle bg \otimes 1 - b \otimes 1\rangle \cong B/\langle bg - b\rangle = B/\langle b(g-1)\rangle = B/(B \cdot IG).$$

Calcoliamo $H_1(G,B)$ nel caso in cui G agisca banalmente su B. $H_1(G,B) =$ *22/04/01*
$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathbb{Z})$, per calcolarlo ci basta una presentazione proiettiva di $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}[G]$-modulo (usando la proposizione 63).

$$0 \longrightarrow IG \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

è una presentazione proiettiva di $\mathbb{Z}$ e per la proposizione 63 $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} 1 \otimes i : B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \to B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G]$. Ora $B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \cong B$ e quindi

$$\begin{array}{ccccc} B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG & \xrightarrow{1\otimes i} & B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & B \\ b \otimes (x-1) & \longmapsto & b \otimes (x-1) & \longmapsto & bx - b \end{array}$$

ma G agisce banalmente su B e quindi $bx - b = 0$ e $1 \otimes i = 0$ e $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathbb{Z}) = B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG$.

Ancora $B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \cong B \otimes_{\mathbb{Z}} IG/\langle (b \otimes y(x-1)) - (by \otimes x - 1)\rangle = B \otimes_{\mathbb{Z}} IG/\langle b \otimes (y-1)(x-1)\rangle = B \otimes_{\mathbb{Z}} (IG/IG^2)$.

Lemma 66. *$IG/IG^2 \cong G_{Ab}$.*

Dimostrazione. Definiamo un omomorfismo di gruppi abeliani $\psi : IG \to G_{Ab} = G/G'$, $x - 1 \mapsto xG'$. $IG^2 = \langle (x-1)(y-1)\rangle$; ora $(x-1)(y-1) = (xy-1) - (x-1) - (y-1)$ e quindi $\psi((x-1)(y-1)) = xyG'x^{-1}G'y^{-1}G' = [x,y]G' = G'$. Perciò ψ passa al quoziente e definisce $\widetilde{\psi} : IG/IG^2 \to G_{Ab}$ che è isomorfismo perché ha un'inversa.

Sia $\varphi : G \to IG/IG^2$, $x \mapsto (x-1) + IG^2$, φ è omomorfismo infatti $\varphi(xy) = (xy-1) + IG^2 = (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1) + IG^2 = (x-1) + (y-1) + IG^2$.

IG/IG^2 è abeliano, quindi φ passa al quoziente e definisce $\widetilde{\varphi} : G_{Ab} \to IG/IG^2$ ed è ovvio che $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi}^{-1}$. $\square$

Quindi, se G agisce banalmente su B, $H_1(G,B) = \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathbb{Z}) \cong B \otimes_{\mathbb{Z}} G_{Ab}$. Osserviamo che il lemma 66 fornisce un isomorfismo di gruppi abeliani e non di $\mathbb{Z}[G]$-moduli; ma questo è sufficiente per dire che $B \otimes_{\mathbb{Z}} IG/IG^2 \cong B \otimes_{\mathbb{Z}} G_{Ab}$.

Esercizio 17. Sia G gruppo che agisce banalmente su A; allora $H^1(G,A) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(G,\mathbb{Z}),A)$.

Dimostrazione. Consideriamo la solita presentazione $\mathbb{Z}[G]$-proiettiva di $\mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow IG \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Applicando $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\cdot,A)$ otteniamo

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \xrightarrow{\varepsilon^*} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],A) \xrightarrow{\mu^*} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG,A)$$

Ora se $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],A)$, allora $\mu^*(\varphi) = \varphi_{|IG}$ e per ogni $x \in G$ $\varphi(x-1) = x\varphi(1) - \varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0$. Perciò $\mu^* = 0$ e $H^1(G,A) = \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG,A)$.

Sia $\varphi : IG \to A$ omomorfismo di $\mathbb{Z}[G]$-moduli, allora $\varphi((x-1)(y-1)) = \varphi(x(y-1)-(y-1)) = x\varphi(y-1) - \varphi(y-1) = \varphi(y-1) - \varphi(y-1) = 0$. Quindi $IG^2 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ e φ induce un omomorfismo $\widetilde{\varphi} : IG/IG^2 \to A$. Perciò possiamo definire un omomorfismo di gruppi abeliani

$$\begin{gathered} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG,A) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(IG/IG^2,A) \\ \varphi \mapsto \widetilde{\varphi} \end{gathered}$$

Costruiamone un'inversa

$$\begin{gathered} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(IG/IG^2,A) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG,A) \\ \psi \mapsto \varphi = \psi \circ \pi \end{gathered}$$

Ora φ è un omomorfismo di gruppi abeliani ma $x(y-1) - (y-1) = (x-1)(y-1) \in IG^2$ e $\varphi(x(y-1)) = \psi([x(y-1)]) = \psi([y-1]) = \varphi(y-1) = x\varphi(y-1)$ e quindi φ è un omomorfismo di $\mathbb{Z}[G]$-moduli. Inoltre $IG/IG^2 \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} IG/IG^2 \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG = H_1(G,\mathbb{Z})$ e quindi $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(IG/IG^2,A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(G,\mathbb{Z}),A)$. □

5.1 Digressione topologica

In questa sezione enunceremo qualche applicazione della teoria sviluppata alla topologia algebrica. In particolare vedremo come la coomologia di gruppi può essere utilizzata per calcolare l'omologia (singolare o equivalenti) di spazi topologici.

Definizione 47. Uno spazio topologico X connesso per archi si dice *n-connesso* se $\pi_1(X, *) = \pi_2(X, *) = \cdots = \pi_n(X, *) = \{e\}$

Teorema 67 (Hopf)**.** Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato connesso, localmente semplicemente connesso e tale che il suo rivestimento universale $\widetilde{X}$ sia n-connesso (con $n \geq 1$). Allora per $1 \leq i \leq n$

$$H_i(X, \mathbb{Z}) \cong H_i(\pi_1(X, x_0), \mathbb{Z})$$

con $\pi_1(X, x_0)$ che agisce banalmente su $\mathbb{Z}$. Inoltre c'è una successione esatta

$$\pi_{n+1}(X, x_0) \longrightarrow H_{n+1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+1}(\pi_1(X, *), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

In realt Hopf ha dimostrato soltanto il caso $n = 1$.

Definizione 48. Uno spazio topologico connesso per archi X si dice *asferico* se il suo rivestimento universale $\widetilde{X}$ verifica $\pi_n(\widetilde{X}, *) = (0)$ $\forall n \geq 1$.

Per il teorema di Hopf l'omologia di uno spazio asferico è completamente determinata dall'omologia di gruppi di $\pi_1(X, *)$.

Definizione 49. Uno spazio topologico "sufficientemente regolare" X si dice *di Eilenberg-Maclane di tipo* $K(G, n)$ se

(1) per $n = 1$, $\pi_1(X, *) = G$ e $\pi_n(X, *) = (0)$ $\forall n \geq 2$;

(2) per $n > 1$, G è abeliano, $\pi_n(X, *) = G$ e $\pi_j(X, *) = (0)$ $\forall j \neq n$.

Gli spazi $K(G, 1)$ sono asferici. Un esempio di $K(\mathbb{Z}, 1)$ è S^1; infatti sappiamo che il rivestimento esponenziale $e : \mathbb{R} \to S^1$ induce un isomorfismo $e_* : \pi_n(\mathbb{R}, *) \to \pi_n(S^1, *)$ se $n \geq 2$ ed $\mathbb{R}$ è contrattile.

Teorema 68. (1) Per ogni gruppo G esiste uno spazio $K(G, 1)$,

(2) per ogni gruppo abeliano G esiste uno spazio $K(G, n)$,

(3) due spazi $K(G, n)$ hanno lo stesso tipo di omotopia.

Teorema 69 (Kan-Thurston)**.** Per ogni spazio topologico X connesso esiste un gruppo G_X ed una mappa $\varphi : K(G_X, 1) \to X$ che induce isomorfismi $\varphi_* : H_n(K(G_X, 1), \mathbb{Z}) \to H_n(X, \mathbb{Z})$.

Questo teorema è utile perché $K(G_X, 1)$ è asferico e quindi la sua omologia intera è completamente determinata dall'omologia di gruppi di G_X.

Esempio 21. Consideriamo $\mathscr{M} = \mathbb{C}^n \setminus (\cup_{i<j}\{x_i - x_j = 0\})$. $\mathscr{M}$ è un $K(G,1)$. Un cammino in $\mathscr{M}$ è un $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^n, t \mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ con $\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t)\ \forall, i \neq j, t \in [0,1]$; $PB_n = \pi_1(\mathscr{M}, *)$ è il *gruppo delle trecce pure*.

S_n agisce su $\mathscr{M}$ permutando le coordinate $B_n = \pi_1(\mathscr{M}/S_n, *)$ è il gruppo delle n-*trecce*. Possiamo considerare la mappa

$$\begin{aligned} \delta : \mathscr{M}/S_n &\to \mathbb{C}^* \\ [(x_1, \dots, x_n)] &\mapsto \textstyle\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 \end{aligned}$$

δ induce una fibrazione detta *fibrazione di Milnor*; la fibra F si dice *fibra di Milnor* e vale

$$H^i(B_n, \mathbb{Z}[[q,q^{-1}]]) \cong H^i(F, \mathbb{Z}), \qquad H_i(B_n, \mathbb{Z}[q,q^{-1}]) \cong H_i(F, \mathbb{Z}).$$

dove B_n agisce su $\mathbb{Z}[[q,q^{-1}]]$ e su $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ mandando ogni generatore nella moltiplicazione per q. In particolare questo è un esempio di (co)omologia con azione non banale.

5.2 Ancora su $H^1(G,A)$

Definizione 50. Sia G un gruppo ed A uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo; una derivazione è una funzione $\varphi : G \to A$ tale che

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + x\varphi(y).$$

L'insieme delle derivazioni $\mathrm{Der}\,(G,A)$ è un gruppo abeliano con la somma ovvia.

Osserviamo che se φ è una derivazione allora $\varphi(1) = 0$; infatti $\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) + 1\varphi(1) = 2\varphi(1)$.

$\mathrm{Der}\,(G,\cdot)$ è un funtore $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}[G]} \to \mathfrak{Ab}$.

Teorema 70. Il funtore $\mathrm{Der}\,(G,\cdot)$ è rappresentato dallo $\mathbb{Z}[G]$-modulo IG, cioè esiste un'equivalenza naturale $\eta : \mathrm{Der}\,(G,\cdot) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG,\cdot)$. In particolare

$$\forall A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}[G]} \quad \mathrm{Der}\,(G,A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG,A).$$

Dimostrazione. Consideriamo gli omomorfismi di gruppi abeliani

$$\begin{aligned} \eta_A : \mathrm{Der}\,(G,A) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG,A) \\ d &\mapsto (x - 1 \mapsto d(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_A : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG,A) &\to \mathrm{Der}\,(G,A) \\ \varphi &\mapsto (x \mapsto \varphi(x-1)) \end{aligned}$$

Inanzitutto osserviamo che $\eta_A(d)$ è ben definito come omomorfismo di gruppi abeliani, ma ricordando che $(xy-1) = x(y-1) + (x-1)$ si ha

$$\eta_A(d)(x(y-1)) = \eta_A(d)((xy-1)-(x-1)) = \\ \eta_A(d)(xy-1) - \eta_A(d)(x-1) = d(xy) - d(x) = xd(y) = x\eta_A(d)(y-1)$$

e quindi $\eta_A(d)$ è un omomorfismo di $\mathbb{Z}[G]$-moduli. Ora è chiaro che $\xi_A = \eta_A^{-1}$ perciò dobbiamo solo vedere che η è una trasformazione naturale. Sia $\alpha : A \to A'$ morfismo e sia $d \in \mathrm{Der}\,(G, A)$, allora $\alpha_*(\eta_A(d))(x-1) = \alpha(\eta_A(d)(x-1)) = \alpha(d(x))$ mentre $\eta_{A'}(\alpha_*(d))(x-1) = \alpha_*(d)(x) = \alpha(d(x))$ e ci siamo. □

Definiamo il sottogruppo delle *derivazioni interne*

$$\mathrm{IDer}\,(G, A) = \{d_a : a \in A\}$$

dove $d_a(x) = (x-1)a$; d_a è effettivamente una derivazione, infatti $d_a(xy) = (xy-1)a = (x(y-1)+(x-1))a = d_a(x) + xd_a(y)$. Consideriamo la presentazione $\mathbb{Z}[G]$-proiettiva di $\mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow IG \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ed applichiamo il funtore $\mathrm{Hom}(\cdot, A)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG, A) \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow 0$$

Ora, identificando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IG, A)$ con $\mathrm{Der}\,(G, A)$ abbiamo che $i^*\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) = \mathrm{IDer}\,(G, A)$; infatti $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \ni (\varphi : 1 \mapsto a) \mapsto \xi(\varphi \circ i) : x \mapsto \varphi(x-1) = (x-1)a \in \mathrm{IDer}\,(G, A)$. Abbiamo quindi dimostrato che:

Teorema 71. *$H^1(G, A) \cong \mathrm{Der}\,(G, A)/\mathrm{IDer}\,(G, A)$.*

Esercizio 18. Sia $C_m = \langle x \rangle$ gruppo ciclico di ordine m. C_m agisce su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m$ come $x(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (a_m, a_1, \ldots, a_{m-1})$. Quindi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m$ è uno $\mathbb{Z}[C_m]$-modulo e possiamo calcolare la coomologia $H^1(C_m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m)$.

Sia $d \in \mathrm{Der}\,(C_m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m)$, allora $d(e) = 0$ e (si prova per induzione) $d(x^n) = d(x) + xd(x) + \cdots + x^{n-1}d(x)$. In particolare $d(x) + xd(x) + \cdots + x^{m-1}d(x) = d(x^m) = 0$; perciò $d(x) = (a_1, \ldots, a_m)$ tale che $\sum_{i=1}^m a_i = 0$ e

$$\mathrm{Der}\,(C_m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m) \cong \mathrm{Ker}\,(1 + x + \cdots + x^{m-1}) = \\ \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m : \quad \textstyle\sum_{i=1}^m a_i = 0\}.$$

Inoltre se $b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m$ $d_b(x) = (x-1)b$ e quindi con la stessa identificazione (cioè $d \mapsto d(x)$) abbiamo $\mathrm{IDer}\,(C_m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m) \cong \mathrm{Im}\,(x-1)$ e $H^1(C_m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m) =$

$\mathrm{Ker}\,(1+x+\cdots+x^{m-1})/\mathrm{Im}\,(x-1)$. Ma $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m$ è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) e $(x-1)$ e $(1+x+\cdots+x^{m-1})$ sono applicazioni lineari. Ad esempio se $m=4$ $x-1$ è rappresentata dalla matrice

$$[x-1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1. \end{pmatrix}$$

In generale l'applicazione $x-1$ ha rango $m-1$ e $1+x+\cdots+x^{m-1}$ non è l'applicazione nulla (ad esempio non annulla mai l'elemento $(1,0,\ldots,0)$); quindi per questioni di dimensione abbiamo $\mathrm{Im}\,x-1 = \mathrm{Ker}\,(1+x+\cdots+x^{m-1})$ e $H^1(C_m,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (0)$.

Esercizio 19. Se $C_2=\{e,x\}$ agisce su $\mathbb{Z}$ con $xn=-n$ calcolare $H^1(C_2,\mathbb{Z})$.

Dimostrazione. Sia $n\in\mathbb{Z}$, perché $d: x\mapsto n$ sia una derivazione è sufficiente che $d(x^2)=0$, ma $d(x^2)=d(x)-d(x)=0$. Perciò con l'identificazione $d\mapsto d(x)$ abbiamo $\mathrm{Der}\,(C_2,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$. Se $d=d_n: x\mapsto(x-1)n = xn-n=-2n$ e quindi con la stessa identificazione abbiamo $\mathrm{IDer}\,(C_2,\mathbb{Z})\cong 2\mathbb{Z}$ e quindi $H^1(C_2,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Esercizio 20. Calcolare $H_n(C_m,\mathbb{Z})$ dove C_m agisce banalmente su $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Una risoluzione $\mathbb{Z}[C_m]$-proiettiva di $\mathbb{Z}$ è

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{T} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{T} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dove ε è l'augmentazione, $T(1)=x-1$ e $N(1)=(1+x+\cdots+x^{m-1})$. Questo è un complesso perché $T\circ N(1) = N\circ T(1) = (x-1)(1+x+\cdots+x^{m-1}) = x^m-1=0$. È chiaro poi che il complesso è proiettivo, mostriamo che è anche aciclico. Sia $y=\sum_{h=0}^{m-1}a_hx^h\in\mathbb{Z}[C_m]$ con $y(x-1)=0$. Allora $y(x-1) = (a_{m-1}-a_0)+(a_0-a_1)x+\cdots+(a_{m-2}-a_{m-1})x^{m-1}$ e quindi ($\mathbb{Z}[C_m]$ come gruppo abeliano è libero sugli elementi di C_m) $a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=a$ ed $y=a(1+x+\cdots+x^{m-1})$; cioè $\mathrm{Ker}\,T=\mathrm{Im}\,N$. Invece se $0=y(1+x+\cdots+x^{m-1}) = \left(\sum_{h=0}^{m-1}a_h\right)+\left(\sum_{h=0}^{m-1}a_h\right)x+\cdots+\left(\sum_{h=0}^{m-1}a_h\right)x^{m-1}$ allora $\sum_{h=0}^{m-1}a_h=0$ ed $y=-\left(\sum_{h=1}^{m-1}a_h\right)+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1} = \sum_{h=1}^{m-1}a_h(x^h-1)\in\langle x-1\rangle$ e quindi $\mathrm{Ker}\,N=\mathrm{Im}\,T$.

Questa è una *risoluzione ciclica di periodo* 2. In particolare se H_n è non nullo per qualche n allora ci sono infiniti H_i non nulli e *non possono esistere risoluzioni proiettive finite di* $\mathbb{Z}$ *come* $\mathbb{Z}[C_m]$*-modulo banale.*

Ora $H_n(C_m,\mathbb{Z}) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}[C_m]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Applicando il funtore $\cdot \otimes_{\mathbb{Z}[C_m]} \mathbb{Z}$ ed identificando $\mathbb{Z}[C_m] \otimes_{\mathbb{Z}[C_m]} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ il complesso diventa

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

perché $(x-1)\otimes n = x\otimes n - 1\otimes n = 1\otimes xn - 1\otimes n = 1\otimes n - 1\otimes n = 0$ e $\sum_{h=0}^{m-1} x^h \otimes n = 1 \otimes \sum_{h=0}^{m-1} x^h n = 1 \otimes \sum_{h=0}^{m-1} n = 1 \otimes mn$. e dunque $H_0(C_m,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_{2n}(C_m,\mathbb{Z}) = (0)$ e $H_{2n+1}(C_m,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. □

Esercizio 21. Con le stesse ipotesi dell'esercizio precedente calcolare $H^n(C_m,\mathbb{Z})$.

Dimostrazione. Consideriamo la risoluzione $\mathbb{Z}[C_m]$-proiettiva dell'esercizio precedente

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{T} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{T} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Applicando il funtore $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[C_m]}(\cdot,\mathbb{Z})$ ed identificando $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[C_m]}(\mathbb{Z}[C_m],\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ otteniamo il complesso

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m\cdot} \cdots$$

Infatti se $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[C_m]}(\mathbb{Z}[C_m],\mathbb{Z})$ $T^*(\varphi)(1) = \varphi(x-1) = x\varphi(1) - \varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0$ e $N^*(\varphi)(1) = \varphi\left(\sum_{h=0}^{m-1} x^h\right) = \sum_{h=0}^{m-1} x^h\varphi(1) = m\varphi(1)$. Perciò $H^0(C_m,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^{2n+1}(C_m,\mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}(m\cdot) = (0)$ e $H^{2n}(C_m,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. □

5.2.1 Applicazione: Teorema 90 di Hilbert

28/04/08

Se K è un campo ed E/K è un'estensione di Galois; allora $G = \operatorname{Gal}(E/K)$ agisce in modo ovvio sul gruppo additivo $(E,+)$ e possiamo considerare E come uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo.

Teorema 72 (90 di Hilbert in forma additiva)**.** Sia E/K un'estensione di Galois finita con gruppo di Galois $G = \operatorname{Gal}(E/K)$. Allora $H^1(G,E) = 0$

Dimostrazione. La traccia $\operatorname{Tr} = \sum_{\tau\in G} \tau$ è combinazione lineare non nulla di caratteri di E^* a valori in E e quindi per il teorema di indipendenza dei caratteri di Artin $\operatorname{Tr} \neq 0$ ed esiste $\vartheta \in E$ tale che $\operatorname{Tr}(\vartheta) \neq 0$.

Sia $\alpha \in \operatorname{Der}(G,E)$, dobbiamo fare vedere che α è interna cioè che esiste $b \in E$ tale che per ogni $\sigma \in G$ $\alpha(\sigma) = (1-\sigma)b$. Prendiamo $b = \frac{1}{\operatorname{Tr}(\vartheta)} \sum_{\tau\in G} \alpha(\tau)\tau(\vartheta)$. Per ogni $\sigma \in G$ vale

$$\sigma(b) = \frac{1}{\operatorname{Tr}(\vartheta)} \sum_{\tau\in G} \sigma\alpha(\tau)\sigma\tau(\vartheta) = \frac{1}{\operatorname{Tr}(\vartheta)} \sum_{\tau\in G} (\alpha(\sigma\tau) - \alpha(\sigma))\sigma\tau(\vartheta) =$$
$$\frac{1}{\operatorname{Tr}(\vartheta)} \sum_{\tau\in G} \alpha(\sigma\tau)\sigma\tau(\vartheta) - \alpha(\sigma)\frac{1}{\operatorname{Tr}(\vartheta)} \sum_{\tau\in G} \sigma\tau(\vartheta) = b - \alpha(\sigma).$$

e quindi $\alpha(\sigma) = b - \sigma(b) = (1-\sigma)b$ ed $\alpha \in \mathrm{IDer}\,(G, E)$. $\square$

Osservazione 28. Spesso il teorema 90 è enunciato come: Sia E/K un'estensione ciclica, $\gamma \in E$ allora $\mathrm{Tr}(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \beta - \sigma(\beta)$ per qualche $\beta \in E$ (dove σ è un generatore di $\mathrm{Gal}\,(E/K)$). Vediamo come si può ricavare questa forma del teorema.

Sia $G = C_m = \langle\sigma\rangle$, una derivazione $\alpha : C_m \to E$ è univocamente determinata da $\alpha(\sigma)$ ed $\alpha(\sigma) = \gamma$ definisce una derivazione se e solo se $(1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{m-1})\gamma = \mathrm{Tr}(\gamma) = 0$. Quindi possiamo identificare $H^1(G, A) = \mathrm{Der}\,(G, A)/\mathrm{IDer}\,(G, A) \cong \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}/(\sigma - 1)E$.

Ora dal fatto che $H^1(G, E) = 0$ abbiamo che $\gamma = \alpha(\sigma) = (1-\sigma)\beta$ (viceversa è chiaro che se $\gamma = \beta - \sigma(\beta)$ allora $\mathrm{Tr}(\gamma) = 0$).

Teorema 73 (Artin-Schreier)**.** Sia K un campo di caratteristica p; E/K un'estensione ciclica di grado p,

(1) allora esiste $\alpha \in E$ tale che $E = K(\alpha)$ ed α è radice di $x^p - x - a$ con $a \in K$;

(2) viceversa dato $b \in K$ $x^p - x - b$ ha tutte le radici in K oppure è irriducibile.

Dimostrazione. Facciamo solo il primo punto, in cui si applica il teorema 90. $\mathrm{Tr}(-1) = -p = 0$ e quindi esiste $\alpha \in E$ tale che $-1 = (1-\sigma)\alpha$ (dove $\mathrm{Gal}\,(E/K) = \langle\sigma\rangle$) e quindi $\sigma\alpha = \alpha + 1$ e gli elementi $\sigma^h\alpha = \alpha + h$ sono tutti distinti. In particolare $[K(\alpha) : K] = p$ ed $E = K(\alpha)$. Per mostrare che α è radice di $x^p - x - a$ basta mostrare che $\sigma(\alpha^p - \alpha) = (\sigma\alpha)^p - \sigma\alpha = (\alpha+1)^p - (\alpha+1) = \alpha^p - \alpha$ e concludere utilizzando la corrispondenza di Galois. $\square$

Se E/K è un'estensione di Galois finita e G è il suo gruppo di Galois possiamo considerare l'azione di G sul gruppo moltiplicativo E^*. Utilizzeremo la notazione esponenziale, cioè scriveremo $\sigma(\gamma) = \gamma^\sigma$.

Teorema 74 (90 di Hilbert in forma moltiplicativa)**.** Sia E/K estensione di Galois finita e $G = \mathrm{Gal}\,(E/K)$, allora $H^1(G, E^*) = 0$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \mathrm{Der}\,(G, E^*)$, dobbiamo mostrare che α è una derivazione interna. Per il teorema di indipendenza dei caratteri esiste $\vartheta \in E$ tale che $\beta = \sum_{\tau\in G} \alpha(\tau)\vartheta^\tau \neq 0$.

$$\beta^\sigma = \sum_{\tau\in G} \alpha(\tau)^\sigma \vartheta^{\sigma\tau} = \sum_{\tau\in G} \alpha(\sigma\tau)\alpha(\sigma)^{-1}\vartheta^{\sigma\tau} = \alpha(\sigma)^{-1} \sum_{\tau\in G} \alpha(\sigma\tau)\vartheta^{\sigma\tau} = \alpha(\sigma)^{-1}\beta.$$

Da cui $\alpha(\sigma) = \beta^{1-\sigma}$ ed α è una derivazione interna. $\square$

Osservazione 29. Anche qui con un ragionamento analogo a quello precedente otteniamo la forma più popolare del teorema di Hilbert. Sia E/K estensione ciclica, $\gamma \in E$, allora $N(\gamma) = 1 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)}$ (dove $N(\gamma) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}\,(E/K)} \sigma(\gamma)$ è la *norma*).

5.3 $\mathbb{Z}[G]$-risoluzioni proiettive di $\mathbb{Z}$

Ricordiamo che $H^n(G, A) = \mathrm{Ext}\,^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ ed $H_n(G, B) = \mathrm{Tor}\,^{\mathbb{Z}[G]}_n(B, \mathbb{Z})$. Perciò per calcolare omologia e coomologia dei gruppi sarebbe utile avere a dispozione delle risoluzioni $\mathbb{Z}[G]$-libere standard di $\mathbb{Z}$ (visto come lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale).

5.3.1 Bar-resolution omogenea

Sia B_n, $n \geq 0$ il gruppo libero abeliano sulle $n+1$-uple $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ con $y_i \in G$. B_n è uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo con l'azione a sinistra

$$\forall y \in G \quad y(y_0, y_1, \dots, y_n) = (yy_0, yy_1, \dots, yy_n).$$

Costruiamo il complesso B

$$\cdots \longrightarrow B_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dove ∂_n è il solito bordo simpliciale:

$$\partial_n(y_0, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)$$

ed ε è l'augmentazione classica; $B_0 = \langle (1) \rangle_{\mathbb{Z}[G]} \cong \mathbb{Z}[G]$ ed ε è data da $\varepsilon(y_0) = 1$.

I B_n sono $\mathbb{Z}[G]$-moduli liberi sulla base

$$\{(1, y_1, \dots, y_n) : y_1, \dots, y_n \in G\}.$$

Infatti questi elementi generano B_n perché $(y_0, \dots, y_n) = y_0(1, y_0^{-1}y_2, \dots, y_0^{-1}y_n)$; inoltre supponiamo di avere una relazione

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{g \in G} m_g^i g \right) (1, y_1^i, \dots, y_n^i) = \sum_{i=1, g \in G}^{n} m_g^i (g, gy_1^i, \dots, gy_n^i).$$

e gli elementi $(g, gy_1^i, \dots, gy_n^i)$ sono tutti distinti [redacted]. Quindi gli m_g^i sono tutti nulli e la relazione è banale.

GUARDIAMO IL COMPLESSO COME COMPLESSO DI GRUPPI ABELIANI E

Resta da vedere che il complesso definito è aciclico. Facciamo vedere che l'identità $id_B : B \to B$ è omotopicamente nulla. Definiamo $\Sigma : B \to B$ morfismo di GRUPPI ABELIANI GRADUATI [redacted] di grado -1 tale che $\partial_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}\partial_n = id_B$. Basta prendere $\Sigma_n(y_0, \dots, y_n) = (1, y_0, \dots, y_n)$ e $\Sigma_{-1}(1) = 1$. Infatti

$$\begin{aligned}
&(\partial_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}\partial_n)(y_0, \dots, y_n) = \\
\partial_{n+1}(1, y_0, \dots, y_n) + \Sigma_{n-1}&\left(\sum_{h=0}^{n}(-1)^h(y_0, \dots, \hat{y}_h, \dots, y_n)\right) = \\
(y_0, \dots, y_n) + &\sum_{h=0}^{n}(-1)^{h+1}(1, y_0, \dots, \hat{y}_h, \dots, y_n) + \\
&\sum_{h=0}^{n}(-1)^h(1, y_0, \dots, \hat{y}_h, \dots, y_n) = (y_0, \dots, y_n).
\end{aligned}$$

Osserviamo che Σ è un omotopia sul *complesso augmentato* (cioè con $B_{-1} = \mathbb{Z}$ e $\partial_0 = \varepsilon$ è l'augmentazione) e questo va bene perché prova allo stesso tempo che il complesso è aciclico e che $H_0(B) = \mathbb{Z}$.

Per trovare un'altra risoluzione si possono introdurre sui B_n le relazioni

$$(y_0, \dots, y_i, y_i, y_{i+2}, \dots, y_n) = 0$$

(come si fa spesso in topologia algebrica); in questo modo otteniamo un modulo graduato che è un quoziente di quello costruito prima ed è facile vedere che l'operatore di bordo passa al quoziente e definisce un complesso. Anche l'omotopia Σ passa ai quozienti e quindi il complesso è ancora aciclico ed è semplice vedere che i moduli ottenuti sono ancora liberi.

5.3.2 Bar-resolution non omogenea

Definiamo B'_n come lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo libero sulle n-uple $[x_1|x_2|\cdots|x_n]$ con $x_i \in G$. Il bordo si definisce tramite:

$$\partial_n([x_1|x_2|\cdots|x_n]) = x_1[x_2|\cdots|x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1|\cdots|x_i x_{i+1}|\cdots|x_n] + (-1)^n[x_1|\cdots|x_{n-1}]$$

e l'augmentazione $\varepsilon' : B'_0 \to \mathbb{Z}$ è data da $\varepsilon'[] = 1$.

Questo complesso è *isomorfo* a quello precedente (e quindi il complesso è aciclico ed è una risoluzione proiettiva). Infatti, definiamo $\varphi_n : B_n \to B'_n$, $\varphi_n(1, y_1, \dots, y_n) = [y_1|y_1^{-1}y_2|y_2^{-1}y_3|\cdots|y_{n-1}^{-1}y_n]$ e $\psi_n : B'_n \to B_n$, $\psi_n([x_1|\cdots|x_n]) = (1, x_1, x_1x_2, \dots, x_1x_2\cdots x_n)$. φ e ψ sono isomorfismi ed in particolare $\varphi^{-1} = \psi$.

Anche qui possiamo quozientare per il sottocomplesso generato da

$$\{[x_1|\dots|x_n] : x_i = 1 \text{ per qualche } i\}$$

∂_n passa al quoziente e φ definisce un isomorfismo con il complesso ottenuto al paragrafo precedente.

Esercizio 22. Se G è un gruppo finito di ordine m ed A è un G-modulo, allora se $i \geq 1$ ogni elemento di $H_i(G, A)$ è di m-torsione (cioè ha ordine un divisore di m)[1].

Dimostrazione. Consideriamo il complesso augmentato $\widetilde{B}'$

$$\cdots \longrightarrow B'_n \xrightarrow{\partial_n} B'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B'_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e costruiamo un'omotopia $\Sigma : \widetilde{B}' \to \widetilde{B}'$ tra la mappa $m\cdot$ e l'applicazione nulla. Lo facciamo per induzione, sia $\Sigma_{-1}(1) = \left(\sum_{y\in G} y\right)[]$ (è facile vedere che questo è un omomorfismo di $\mathbb{Z}[G]$-moduli), allora $\varepsilon \circ \Sigma_{-1}(1) = \left(\sum_{y\in G} y\right) 1 = o(G) = m$. Vediamo il passo induttivo; dobbiamo trovare per ogni $[x_1|\cdots|x_n] \in B'_n$ un elemento $c \in B'_{n+1}$ tale che $\partial_{n+1}c + \Sigma_{n-1} \circ \partial_n[x_1|\cdots|x_n] = m[x_1|\cdots|x_n]$ però

$$\begin{aligned} \partial_n\left(\Sigma_{n-1} \circ \partial_n[x_1|\cdots|x_n] - m[x_1|\cdots|x_n]\right) &= \\ \partial_n \circ \Sigma_{n-1}(\partial_n[x_1|\cdots|x_n]) - m\partial_n[x_1|\cdots|x_n] &= \\ m\partial_n[x_1|\cdots|x_n] - \Sigma_{n-2}\partial_{n-1} \circ \partial_n[x_1|\cdots|x_n] - m\partial_n[x_1|\cdots|x_n] &= 0 \end{aligned}$$

e siccome il complesso è aciclico abbiamo $\Sigma_{n-1}\circ\partial_n[x_1|\cdots|x_n] - m[x_1|\cdots|x_n] = \partial_{n+1}c$ per qualche $c \in B'_{n+1}$. Questo prova che per ogni $i \geq 1$ $(m\cdot)_* : H_i(G, A) \to H_i(G, A)$ è l'applicazione nulla. $\square$

Esercizio 23. Dato un gruppo G ed un G-modulo A, individuare i 2-cocicli (cioè $Z^2(G, A)$).

Dimostrazione. Consideriamo la risoluzione

$$B'_3 \xrightarrow{\partial_3} B'_2 \longrightarrow B'_1 \longrightarrow B'_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Applichiamo $\mathrm{Hom}(\cdot A)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(B'_0, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B'_1, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B'_2, A) \xrightarrow{\partial_3^*} \mathrm{Hom}(B'_3, A)$$

[1] Questo non è vero per $i = 0$, infatti se scegliamo $A = \mathbb{Z}[G]$ allora $H_0(G, A) = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ non ha m-torsione

Sia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B'_2, A)$; f è individuato da una funzione $F : G \times G \to A$ $(f([x|y]) = F(x,y))$. $\partial_3^*(f)([x|y|z]) = f \circ \partial_3([x|y|z]) = f(x[y|z] - [xy|z] + [x|yz] - [x|y]) = xf([y|z]) - f([xy|z]) + f([x|yz]) - f([x|y])$ ed $f \in Z^2(G,A)$ se e solo se $\partial_3^*(f) = 0$; perciò possiamo identificare $Z^2(G,A)$ con

$$\{F : G\times G \to A : \quad xF(y,z) - F(xy,z) + F(x,yz) - F(x,y) = 0\,\forall x,y,z \in G\}$$

$\square$

29/04/08

Osservazione 30. Se A è un K-spazio vettoriale la mappa $A \to A, x \mapsto mx$ con $(m, \mathrm{char}\, K) = 1$ (o $\mathrm{char}\, K = 0$) è invertibile ed induce un isomorfismo

$$H^i(G,A) \to H^i(G,A)$$

dove G è un gruppo finito che agisce su A, ed $o(G) = m$. Ma sappiamo da un esercizio precedente che la mappa $m\cdot : B'_i \to B'_i$ è omotopicamente nulla se $i \geq 1$; perciò

$$H^i(G,A) = (0) \quad \forall i \geq 1.$$

Da questo segue per esempio il teorema di Maschke[2] (la dimostrazione è simile a quella del teorema di Weyl; si veda anche l'esempio 5)

Osservazione 31. Se chiamiamo per ogni n $X_n = \{[x_1|\cdots|x_n] : x_i \in G\}$ allora $B_n = FX_n$ ($\mathbb{Z}[G]$-modulo libero su X_n). Nel paragrafo 2.3 abbiamo costruito un'equivalenza naturale $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(F\cdot, A) \to \mathfrak{S}(\cdot, GA)$ (dove $G : \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{S}$ è il funtore dimenticante). Gli insiemi $\mathfrak{S}(X_n, GA)$ possono essere considerati come gruppi abeliani con la somma ovvia e a ben vedere η è un'equivalenza naturale tra i funtori $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(F\cdot, A) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{Ab}$ e $\mathfrak{S}(\cdot, GA) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{Ab}$. Inoltre possiamo identificare l'insieme X_n con G^n; in questo modo al complesso

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B_0, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B_1, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B_n, A)$$

corrisponde il complesso

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}(\{*\}, A) \longrightarrow \mathfrak{S}(G, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{S}(G^n, A)$$

dove se $F : G^n \to A$ allora

$$\partial_n F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 F(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i F(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^n F(x_1, \ldots, x_n)$$

Questo ci permette di presentare la coomologia di gruppi come la coomologia di un complesso concreto *senza* utilizzare il funtore $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}$[3].

[2] Si veda [Lan02] e [Ser77]

[3] In alcuni libri la coomologia di gruppi viene definita in questo modo

5.4 Prodotti semidiretti ed estensioni

Definizione 51. Sia G un gruppo ed A un G-modulo; il *prodotto semidiretto* $A \times G$ è il gruppo su $A \times G$ (prodotto cartesiano di A e G)

con l'operazione	$(a,g)(a_1,g_1) = (a + ga_1, gg_1)$,
inverso	$(a,g)^{-1} = (-g^{-1}a, g^{-1})$,
e neutro	$(0,1)$.

Osservazione 32. Si tratta del solito prodotto semidiretto di gruppi; se G ed H sono gruppi e $\varphi : G \to \operatorname{Aut} H$ è omomorfismo il prodotto semidiretto $H \rtimes_\varphi G$ è il gruppo su $G \times H$ dato da

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 \varphi_{g_1}(h_2), g_1 g_2).$$

φ è un'azione di G su H e se H è abeliano ha una struttura di G-modulo indotta da φ e i due prodotti semidiretti definiti coincidono.

Se G è un gruppo ed A è un G-modulo la seguente successione di gruppi è esatta

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \times G \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

Questo è il primo esempio di estensione di G tramite A.

Dato un gruppo G ed un gruppo abeliano A consideriamo una successione esatta di gruppi

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1 \end{tikzcd}$$

Sia $s : G \to E$ una qualunque funzione tale che $ps = id_G$ (cioè una *sezione*). Facciamo agire G su $iA \cong A$ nel seguente modo:

$$gia = s(g)ias(g)^{-1}$$

$iA = \operatorname{Ker} p \Rightarrow iA \triangleleft E$ e quindi $g(ia) \in iA$ per ogni $g \in G$. Ma vogliamo anche che valga

$$h(gia) = (hg)ia$$

verifichiamolo: $hg = p(s(hg))$ ma $h = p(s(h))$, $g = p(s(g))$ e dal fatto che p è omomorfismo $p(s(hg)) = hg = p(s(h))p(s(g)) = p(s(h)s(g))$ ed $s(hg)s(h)^{-1}s(g)^{-1} = ia' \in \operatorname{Ker} p = iA$. Quindi $(hg)(ia) = s(hg)ias(hg)^{-1} = s(h)s(g)(ia')(ia)(ia')^{-1}s(g)^{-1}s(h)^{-1}$. E dal fatto che $iA \cong A$ è abeliano abbiamo $(ia')(ia)(ia')^{-1} = ia$ e $(hg)(ia) = s(h)s(g)(ia)s(g)^{-1}s(h)^{-1} = h(g(ia))$.

Osservazione 33. L'azione di G *non dipende* dalla sezione scelta. Infatti se $t : G \to E$ è un'altra sezione allora per ogni $g \in G$ $p(s(g)) = g = p(t(g))$ e quindi $t(g)^{-1}s(g) = ia' \in \operatorname{Ker} p = iA$ ed $s(g)(ia)s(g)^{-1} = t(g)(ia')^{-1}(ia)(ia')t(g)^{-1} = t(g)(ia)t(g)^{-1}$ (dove l'ultima uguaglianza, come prima, viene dal fatto che iA è abeliano).

Definizione 52. Dato un gruppo G ed un G-modulo A, un'*estensione* di G tramite A è una successione esatta di gruppi

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

in cui l'azione di G su A costruita come sopra coincide con la struttura di G-modulo di A.

Definizione 53. Due estensioni si dicono *equivalenti* se esiste un morfismo $E \to E'$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Come nel caso delle estensioni di moduli tale morfismo è un isomorfismo e quindi quella data è una relazione d'equivalenza.

Indichiamo con $M(G, A)$ l'insieme delle classi di equivalenza delle estensioni di G tramite A.

Osservazione 34. Se G è abeliano possiamo considerare le estensioni di G come $\mathbb{Z}$-moduli $E(G, A)$. Se consideriamo A come lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale abbiamo che $E(G, A) \subseteq M(G, A)$ ma in generale l'inclusione è stretta, infatti le estensioni in $E(G, A)$ coinvolgono soltanto gruppi abeliani.

Osservazione 35. Se G è un gruppo ed A un G-modulo la successione

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow A \times G \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

(dove $A \times G$ indica il prodotto semidiretto) è un'estensione.

Infatti scegliamo la sezione $s : G \to A \times G$,$g \mapsto (0, g)$. Allora $g(a, 1) = (0, g)(a, 1)(0, g)^{-1} = (ga, g)(0, g^{-1}) = (ga, 1)$, cioè l'azione indotta su A dalla successione è la stessa che G aveva su A come G-modulo.

Si dice che un'estensione *spezza* se è equivalente a questa successione (ed in effetti in questo caso la sezione s è un omomorfismo).

Esercizio 24. Sia

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1 \end{tikzcd}$$

un'estensione. Dimostrare che se la sezione s è un omomorfismo allora la successione spezza.

Dimostrazione. Costruiamo un omomorfismo $\varphi : A \times G \to E$ che faccia commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \times G \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & E \arrow[r, "p"] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1
\end{tikzcd}$$

Definiamo $\varphi(a, g) = i(a)s(g)$; φ è omomorfismo, infatti

$$\varphi((a_1, g_1)(a_2, g_2)) = \varphi(a_1 + g_1a_2, g_1g_2) = i(a_1)i(g_1a_2)s(g_1g_2) =$$
$$i(a_1)s(g_1)i(a_2)s(g_1)^{-1}s(g_1)s(g_2) = i(a_1)s(g_1)i(a_2)s(g_2) = \varphi(g_1, a_1)\varphi(g_2, a_2)$$

Inoltre $p \circ \varphi(a, g) = p(i(a))p(s(g)) = g$ e $\varphi \circ i(a) = \varphi(a, 1) = i(a)$, cioè il diagramma commuta. $\square$

Vogliamo arrivare a dire che $H^2(G, A)$ classifica le estensioni di gruppi. Consideriamo l'estensione

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1
\end{tikzcd}$$

dove $s : G \to E$ è una sezione; definiamo

$$\begin{gathered} F : G \times G \to iA \cong A \\ (x, y) \mapsto s(x)s(y)s(xy)^{-1} \end{gathered}$$

Osserviamo che $p(s(x)s(y)s(xy)^{-1}) = 0 \Rightarrow s(x)s(y)s(xy)^{-1} \in \operatorname{Ker} p = iA$. Ora abbiamo (in notazione moltiplicativa)

$$\begin{gathered}
xF(y, z) - F(xy, z) + F(x, yz) - F(x, y) = \\
\left(s(x)s(y)s(z)s(yz)^{-1}s(x)^{-1}\right)\left(s(xy)s(z)s(xyz)^{-1}\right)^{-1} \\
\left(s(x)s(yz)s(xyz)^{-1}\right)\left(s(x)s(y)s(xy)^{-1}\right)^{-1} = \\
\left(s(x)s(y)s(z)s(yz)^{-1}s(x)^{-1}\right)\left(s(xyz)s(z)^{-1}s(xy)^{-1}\right) \\
\left(s(x)s(yz)s(xyz)^{-1}\right)\left(s(xy)s(y)^{-1}s(x)^{-1}\right) = \\
\left(s(x)s(yz)s(xyz)^{-1}\right)\left(s(xyz)s(z)^{-1}s(xy)^{-1}\right) \\
\left(s(xy)s(y)^{-1}s(x)^{-1}\right)\left(s(x)s(y)s(z)s(yz)^{-1}s(x)^{-1}\right) = \\
s(x)s(yz)s(z)^{-1}s(y)^{-1}s(y)s(z)s(yz)^{-1}s(x)^{-1} = e.
\end{gathered}$$

Dove le parentesi commutano perché iA è abeliano.

Ma allora F è un 2-cociclo.

Esercizio 25. Se si sceglie un'altra sezione si ottiene una funzione F che differisce dalla prima per un cobordo (un cobordo è $F(x,y) = xg(y) - g(xy) + g(x)$ con $g : G \to A$ funzione).

Dimostrazione. Siano $s, t : G \to E$ due sezioni e definiamo $g : G \to iA \cong A$ come $g(x) = s(x)t(x)^{-1}$ (osserviamo che $p \circ g(x) = e \Rightarrow g(x) \in iA$); siano $F(x,y) = s(x)s(y)s(xy)^{-1}$ e $H(x,y) = t(x)t(y)t(xy)^{-1}$, allora

$$\begin{aligned} F(x,y) - H(x,y) - \partial g(x,y) = \\ (s(x)s(y)s(xy)^{-1})(t(x)t(y)t(xy)^{-1})^{-1} \\ ((s(x)s(y)t(y)^{-1}s(x)^{-1})(s(xy)t(xy)^{-1})^{-1}(s(x)t(x)^{-1}))^{-1} = \\ (s(x)s(y)s(xy)^{-1})(t(xy)t(y)^{-1}t(x)^{-1}) \\ (t(x)s(x)^{-1})(s(xy)t(xy)^{-1})(s(x)t(y)s(y)^{-1}s(x)^{-1}) = \\ (s(x)s(y)s(xy)^{-1})(s(xy)t(xy)^{-1})(t(xy)t(y)^{-1}t(x)^{-1}) \\ (t(x)s(x)^{-1})(s(x)t(y)s(y)^{-1}s(x)^{-1}) = \\ s(x)s(y)t(y)^{-1}t(y)s(y)^{-1}s(x)^{-1} = e. \end{aligned}$$

□

Osservazione 36. Consideriamo due estensioni equivalenti

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\vartheta"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"'] & E' \arrow[r, "p'"'] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

e siano $s : G \to E$ ed $s' : G \to E'$ sezioni, allora $\vartheta^{-1} \circ s'$ è una sezione di p e quindi i cocicli $i^{-1} \circ F$ e $i^{-1} \circ \vartheta^{-1} \circ H = i'^{-1} \circ H$ differiscono per un cobordo (dove $F(x,y) = s(x)s(y)s(xy)^{-1}$ e $H(x,y) = s'(x)s'(y)s'(xy)^{-1}$). In particolare estensioni equivalenti inducono lo stesso elemento di $H^2(G,A)$.

Teorema 75. La costruzione descritta sopra definisce una corrispondenza biunivoca

$$H^2(G,A) \leftrightarrow M(G,A)$$

ed in questo modo si può mettere su $M(G,A)$ una struttura di gruppo abeliano.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che la corrispondenza è ben definita; cioè non dipende dalla sezione scelta e dal rappresentante nella classe di equivalenza di estensioni.

Costruiamo un'inversa. Sia $F : G \times G \to A$ un cociclo; possiamo supporre che sia $F(x,1) = F(1,x) = 0$, infatti consideriamo $f : G \to A$ definita da $f(x) = F(1,x)$ e definiamo $F' = F - \partial f$, dalla condizione di cociclo otteniamo

$$\partial F(x_1, x_2, x_3) = x_1 F(x_2, x_3) - F(x_1 x_2, x_3) + F(x_1, x_2 x_3) - F(x_1, x_2) = 0$$

e ponendo $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ otteniamo $F(1,x) = F(1,xy)$ mentre ponendo $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ otteniamo $xF(y,1) = F(xy,1)$. Ora

$$F'(x,y) = F(x,y) - xF(1,y) + F(1,xy) - F(1,x) = F(x,y) - xF(1,y)$$

da cui abbiamo immediatamente che $F'(1,y) = 0$ mentre $F'(x,1) = F(x,1) - xF(1,1) = 0$.

Fissato un cociclo $F : G \times G \to A$ tale che per ogni $g \in G$ $F(g,1) = F(1,g) = 0$, definiamo la seguente struttura di gruppo su $A \times G$ (e indichiamo il gruppo ottenuto con $A \rtimes_F G$):

$$(a_1, g_1)(a_2, g_2) = (a_1 + g_1 a_2 + F(g_1, g_2), g_1 g_2)$$

dobbiamo verificare che quello definito è veramente un gruppo:

- Vediamo l'associativa.

  $$\begin{aligned}((a_1, g_1)(a_2, g_2))(a_3, g_3) &= (a_1 + g_1 a_2 + F(g_1, g_2), g_1 g_2)(a_3, g_3) = \\ &(a_1 + g_1 a_2 + g_1 g_2 a_3 + F(g_1, g_2) + F(g_1 g_2, g_3), g_1 g_2 g_3) \\ (a_1, g_1)((a_2, g_2)(a_3, g_3)) &= (a_1, g_1)(a_2 + g_2 a_3 + F(g_2, g_3), g_2 g_3) = \\ &(a_1 + g_1 a_2 + g_1 g_2 a_3 + g_1 F(g_2, g_3) + F(g_1, g_2 g_3), g_1 g_2 g_3)\end{aligned}$$

  e dalla condizione di cociclo otteniamo $F(g_1, g_2) + F(g_1 g_2, g_3) = g_1 F(g_2, g_3) + F(g_1, g_2 g_3)$.

- Vediamo il neutro.

  $$\begin{aligned}(a,g)(0,1) &= (a + g0 + F(g,1), g) = (a,g) \\ (0,1)(a,g) &= (0 + 1a + F(1,g), g) = (a,g)\end{aligned}$$

- E adesso l'inverso.

  $$\begin{aligned}(a,g)(-g^{-1}a - F(g^{-1}, g), g^{-1}) &= (a - a - gF(g^{-1}, g) + F(g, g^{-1}), 1) = \\ &(F(g, g^{-1}) - gF(g^{-1}, g), 1) \\ (-g^{-1}a - F(g^{-1}, g), g^{-1})(a,g) &= \\ (-g^{-1}a + g^{-1}a - F(g^{-1}, g) &+ F(g^{-1}, g), 1) = (0,1)\end{aligned}$$

  ma dalla condizione di cociclo abbiamo che $gF(g^{-1}, g) - F(1,g) + F(g,1) - F(g, g^{-1}) = gF(g^{-1}, g) - F(g, g^{-1}) = 0$.

Definiamo $p : A \rtimes_F G \to G$ come $p(a,g) = g$ (è chiaramente omomorfismo) ed $i : A \to A \rtimes_F G$ come $i(a) = (a,1)$; i è omomorfismo, infatti $i(a_1)i(a_2) = (a_1,1)(a_2,1) = (a_1 + a_2 + F(1,1), 1) = (a_1 + a_2, 1) = i(a_1 + a_2)$ ed è chiaro che la seguente successione è esatta

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \rtimes_F G \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

Dobbiamo ancora dire che questa mappa $H^2(G,A) \to M(G,A)$ è ben definita, cioè che a cocicli equivalenti corrispondono estensioni equivalenti. Sia $[F'] = [F]$ con $F'(g,1) = F'(1,g) = 0$ per ogni $g \in G$. Ora $F' = F + \partial f$ e $0 = F'(1,g) = F(1,g) + \partial f(1,g) = \partial f(1,g) = f(g) - f(g) + f(1) = f(1)$. Consideriamo la mappa $\varphi : A \rtimes_{F'} G \to A \rtimes_F G$ definita da $\varphi(a,g) = (a + f(g), g)$. φ è omomorfismo, infatti

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1,g_1)\varphi(a_2,g_2) = (a_1 + f(g_1), g_1)(a_2 + f(g_2), g_2) = \\
(a_1 + g_1a_2 + f(g_1) + g_1f(g_2) + F(g_1,g_2), g_1g_2) = \\
(a_1 + g_1a_2 + F(g_1,g_2) + \partial f(g_1,g_2) + f(g_1g_2), g_1g_2) = \\
(a_1 + g_1a_2 + F'(g_1,g_2) + f(g_1g_2), g_1g_2) = \\
\varphi(a_1 + g_1a_2 + F'(g_1,g_2), g_1g_2) = \varphi((a_1,g_1)(a_2,g_2)).
\end{aligned}$$

e adesso è facile vedere che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & A \rtimes_{F'} G \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\varphi"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & A \rtimes_F G \arrow[r, "p"'] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

infatti $\varphi(i'(a)) = \varphi(a,1) = (a + f(1), 1) = (a,1) = i(a)$ e $p'(\varphi(a,g)) = p'(a + f(g), g) = g = p(a,g)$.

Resta soltanto da vedere che le due mappe sono l'una inversa dell'altra. Sia $[F] \in H^2(G,A)$, scegliamo come sezione la mappa $s : G \to A \rtimes_F G$, $s(g) = (0,g)$. All'estensione ottenuta è quindi associato il cociclo

$$\begin{aligned}
s(x)s(y)s(xy)^{-1} = (0,x)(0,y)(0,xy)^{-1} = \\
(F(x,y), xy)(-F((xy)^{-1}, xy), (xy)^{-1}) = \\
(F(x,y) - xyF((xy)^{-1}, xy) + F(xy, (xy)^{-1}), 1) = (F(x,y), 1)
\end{aligned}$$

che è proprio F. Sia invece E estensione in $M(G,A)$, $s : G \to E$ sezione ed $F(x,y) = s(x)s(y)s(xy)^{-1}$ il cociclo associato. Scegliendo $s(1) = 1$ si ha che

$F(x,1) = F(1,y) = 0$ e possiamo costruire l'estensione $A \rtimes_F G$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & A \rtimes_F G \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\varphi"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & E \arrow[r, "p"'] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

definiamo $\varphi(a,g) = i(a)s(g)$. φ è omomorfismo, infatti

$$\begin{aligned} \varphi((a_1,g_1)(a_2,g_2)) = \varphi(a_1 + g_1a_2 + F(g_1,g_2), g_1g_2) = \\ i(a_1)s(g_1)i(a_2)s(g_1)^{-1}s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1}s(g_1g_2) = \\ i(a_1)s(g_1)i(a_2)s(g_2) = \varphi(a_1,g_1)\varphi(a_2,g_2) \end{aligned}$$

e siccome $s(1) = 1$ il diagramma commuta. □

Osservazione 37. Lo zero di $M(G,A)$ è rappresentato dalla successione *split*

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow A \times G \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

Osservazione 38. Se G agisce banalmente su A $H^2(G,A)$ classifica le estensioni

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

dove A è *centrale* (cioè $iA < Z(E)$).

5.5 Cambio di anelli

Sia $\varphi : \Lambda \to \Lambda'$ un omomorfismo di anelli. Se M è un Λ'-modulo possiamo mettere su M una struttura di Λ-modulo nel seguente modo

$$\lambda \in \Lambda, m \in M \quad \lambda m = \varphi(\lambda)m.$$

In questo modo si definisce un funtore $U\varphi : \mathfrak{M}_{\Lambda'} \to \mathfrak{M}_\Lambda$.

Teorema 76. Siano Λ, Λ' anelli ed $U : \mathfrak{M}_{\Lambda'} \to \mathfrak{M}_\Lambda$ funtore

(1) Se U ha un aggiunto sinistro $F : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ e preserva le mappe surgettive, allora F manda proiettivi in proiettivi.

(2) Se U ha un aggiunto destro $\overline{F} : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ e preserva le mappe iniettive; allora $\overline{F}$ manda iniettivi in iniettivi.

Dimostrazione. Sia $P \in \mathfrak{M}_\Lambda$ proiettivo e consideriamo

$$\begin{tikzcd} & FP \arrow[d, "\varphi"] & \\ A \arrow[r, "\varepsilon"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$F \dashv U$ e quindi possiamo costruire il seguente diagramma dove η è un'equivalenza naturale.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(FP, A) \arrow[r, "\eta_{PA}"] \arrow[d, "{(id,\varepsilon)}"'] & \mathrm{Hom}(P, UA) \arrow[d, "{(id,U\varepsilon)}"] \\ \mathrm{Hom}(FP, B) \arrow[r, "\eta_{PB}"'] & \mathrm{Hom}(P, UB) \end{tikzcd}$$

Applicando η otteniamo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\eta_{PB}(\varphi)"] & \\ UA \arrow[r, "U\varepsilon"'] & UB \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dove $U\varepsilon$ è surgettiva perché U preserva le mappe surgettive. Allora $\varphi = \eta_{PB}^{-1}(\eta_{PB}\varphi) = \eta_{PB}^{-1}(U\varepsilon \circ \psi) = \varepsilon \circ \eta_{PA}^{-1}(\psi)$ (dove l'ultima uguaglianza viene dalla naturalità di η) e quindi

$$\begin{tikzcd} & FP \arrow[dl, "\eta_{PA}^{-1}(\psi)"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ A \arrow[r, "\varepsilon"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

L'altro punto è analogo, consideriamo i seguenti diagrammi

$$\begin{tikzcd} & \overline{F}I & \\ B \arrow[ur, dashed, "\eta_{BI}(\psi)"] & A \arrow[l, "\nu"] \arrow[u, "\varphi"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I & \\ UB \arrow[ur, dashed, "\psi"] & UA \arrow[l, "U\nu"] \arrow[u, "\eta_{AI}^{-1}(\varphi)"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Dove $\eta : \mathfrak{M}_\Lambda(U\cdot, \cdot) \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}(\cdot, \overline{F}\cdot)$ è equivalenza naturale e $\eta_{BI}(\psi) \circ \nu = \eta_{AI}(\psi \circ U\nu) = \eta_{AI}(\eta_{AI}^{-1}(\varphi)) = \varphi$. $\square$

Se $\gamma : \Lambda \to \Lambda'$ è omomorfismo allora U_γ manda mappe surgettive in mappe surgettive (perchè se $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ allora $\gamma(\varphi) = \varphi$ come omomorfismi di gruppi abeliani e quindi come funzioni).

U_γ si chiama *funtore di cambiamento di anello*. Se consideriamo Λ' come Λ-modulo destro possiamo costruire per ogni $M \in \mathfrak{M}_\Lambda^l$ il gruppo abeliano

$\Lambda' \otimes_\Lambda M$. Su questo possiamo mettere una struttura di Λ'-modulo sinistro nel seguente modo:

$$\lambda_1'(\lambda_2' \otimes_\Lambda m) = (\lambda_1'\lambda_2') \otimes_\Lambda m.$$

Proposizione 77. U_γ ha come aggiunto sinistro il funtore

$$\begin{gathered} F : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'} \\ M \mapsto \Lambda' \otimes_\Lambda M \end{gathered}$$

Dimostrazione. Dobbiamo costruire un'equivalenza naturale $\eta : \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(\Lambda' \otimes_\Lambda \cdot, \cdot) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, U_\gamma \cdot)$. Sia $\varphi : \Lambda' \otimes_\Lambda A \to B$ omomorfismo di Λ'-moduli, definiamo $\eta_{AB}(\varphi)(a) = \varphi(1 \otimes a)$. Osserviamo che $\eta_{AB}(\varphi)$ è un omomorfismo di Λ-moduli, infatti è chiaramente omomorfismo di gruppi abeliani e

$$\eta(\varphi)(\lambda a) = \varphi(1 \otimes \lambda a) = \varphi(\gamma(\lambda) \otimes a) = \gamma(\lambda)\varphi(1 \otimes a) = \lambda\eta(\varphi)(a).$$

Inoltre η è naturale, infatti siano $\alpha : A' \to A$ e $\beta : B \to B'$ e consideriamo il quadrato

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(\Lambda' \otimes_\Lambda A, B) \arrow[r, "\eta_{AB}"] \arrow[d, "(\alpha,\beta)"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A, U_\gamma B) \arrow[d, "(\alpha,\beta)"] \\ \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(\Lambda' \otimes_\Lambda A', B') \arrow[r, "\eta_{A'B'}"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(A', U_\gamma B') \end{tikzcd}$$

Sia $\varphi : \Lambda' \otimes_\Lambda A \to B$, allora $(\alpha, \beta) \circ \eta_{AB}(\varphi)(a') = \beta \circ \eta_{AB}(\varphi)(\alpha(a')) = \beta \circ \varphi(1 \otimes \alpha(a'))$, mentre $\eta_{A'B'} \circ (\alpha, \beta)(\varphi)(a') = \eta_{A'B'}(\beta \circ \varphi \circ (id \otimes \alpha))(a') = \beta \circ \varphi(1 \otimes \alpha(a'))$.

Vediamo che η è un'equivalenza. Definiamo $\xi_{AB} : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, U_\gamma B) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(\Lambda' \otimes_\Lambda A, B)$ come $\xi_{AB}(\psi)(\lambda' \otimes a) = \lambda'\psi(a)$. Ora se $\varphi : \Lambda' \otimes_\Lambda A \to B$ $\xi_{AB} \circ \eta_{AB}(\varphi)(\lambda' \otimes a) = \lambda'\eta_{AB}(\varphi)(a) = \lambda'\varphi(1 \otimes a) = \varphi(\lambda' \otimes a)$ e se $\psi : A \to U_\gamma B$ allora $\eta_{AB} \circ \xi_{AB}(\psi)(a) = \xi_{AB}(\psi)(1 \otimes a) = \psi(a)$. Perciò $\xi_{AB} = \eta_{AB}^{-1}$. □

Adesso consideriamo Λ' allo stesso tempo come Λ-modulo sinistro (e quindi possiamo costruire il gruppo abeliano $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda', M)$) e come Λ'-modulo destro. Possiamo quindi mettere su $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda', M)$ la struttura di Λ'-modulo sinistro definita da:

$$\lambda'\varphi(\lambda_1') = \varphi(\lambda_1'\lambda').$$

Proposizione 78. U_γ ha come aggiunto destro il funtore

$$\begin{gathered} \overline{F} : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'} \\ M \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda', M) \end{gathered}$$

Dimostrazione. È una generalizzazione del teorema 21. Definiamo η_{AB} : $\mathrm{Hom}_\Lambda(U_\gamma A, B) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(A, \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda', B))$ come $\eta_{AB}(\varphi)(a)(\lambda') = \varphi(\lambda' a)$ e come nel teorema 21 si dimostra che $\eta_{AB}(\varphi)(a) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda', B)$ e $\eta_{AB}(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(A, \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda', B))$.

Definiamo anche l'inversa $\xi_{AB} : \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(A, \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda', B)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(U_\gamma A, B)$ come $\xi_{AB}(\psi)(a) = \psi(a)(1)$ e come prima il fatto che ξ_{AB} sia ben definita e che $\xi_{AB} = \eta_{AB}^{-1}$ è analogo al teorema 21. □

Corollario 79. (1) Se Λ' è un Λ-modulo sinistro proiettivo (attraverso γ) allora U_γ manda proiettivi in proiettivi.

(2) Se Λ' è un Λ-modulo destro piatto (attraverso γ) allora U_γ manda iniettivi in iniettivi.

Dimostrazione. (1) U_γ è aggiunto sinistro di $\overline{F}$ e $\overline{F} = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda', \cdot)$ preserva le mappe surgettive perché Λ' è proiettivo come Λ-modulo e si può applicare il teorema 76 (scambiando U ed F nell'enunciato).

(2) U_γ è aggiunto destro di $F = \Lambda' \otimes_\Lambda \cdot$ e siccome Λ' è piatto come Λ-modulo F preserva le mappe iniettive e applichiamo il teorema 76.

□

Proposizione 80. Sia $U < G$, allora $\mathbb{Z}[G]$ è uno $\mathbb{Z}[U]$-modulo libero attraverso l'immersione $\gamma : \mathbb{Z}[U] \to \mathbb{Z}[G]$.

Dimostrazione. $\mathbb{Z}[G]$ è il gruppo abeliano libero su G, ma $G = \sqcup Ux$ dove Ux varia tra le classi laterali destre di U in G. Allora come gruppo abeliano $\mathbb{Z}[G] = \oplus \mathbb{Z}[U]_{Ux}$ dove $\mathbb{Z}[U]_{Ux}$ è il gruppo abeliano libero su Ux. Però $\mathbb{Z}[U]_{Ux}$ è lo $\mathbb{Z}[U]$-modulo libero su $\{x\}$ e quindi $\mathbb{Z}[G] \cong \oplus_{Ux}\mathbb{Z}[U]$ come $\mathbb{Z}[U]$-modulo.

□

Applicando il corollario 79 si ha immediatamente il seguente:

Proposizione 81. Ogni $\mathbb{Z}[G]$-modulo proiettivo (iniettivo) è uno $\mathbb{Z}[U]$-modulo proiettivo (iniettivo).

Osservazione 39. Se G ha un elemento x di m-torsione (cioè se G contiene una copia isomorfa di C_m) *non* possono esistere risoluzioni $\mathbb{Z}[G]$-proiettive finite di $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale perché altrimenti cambiando gli anelli con l'inclusione $i : \langle x \rangle \to G$ si ha una risoluzione $\mathbb{Z}[C_m]$-proiettiva finita di $\mathbb{Z}$ (che non può esistere per l'esercizio 20).

Teorema 82. Se F è il gruppo libero su S, allora IF è lo $\mathbb{Z}[F]$-modulo libero sull'insieme $S - 1 = \{s - 1 : s \in S\}$.

Dimostrazione. Mostriamo che, se M è un $\mathbb{Z}[F]$-modulo, ogni funzione $f : S - 1 \to M$ si estende in modo unico ad un omomorfismo $\widetilde{f} : IF \to M$. L'unicità segue immediatamente dal fatto che $S-1$ è un insieme di generatori per IF (come $\mathbb{Z}[F]$-modulo).

Sia $M \times F$ prodotto semidiretto e consideriamo le proiezioni $p : M \times F \to F$ e $q : M \times F \to M$ (osserviamo che p è un omomorfismo di gruppi mentre q non lo è). Dal fatto che f è libero su S sappiamo che esiste un unico omomorfismo $\overline{f} : F \to M \times F$ tale che per ogni $s \in S$ $\overline{f}(s) = (f(s-1), s)$. Osserviamo anche che $p \circ \overline{f} = id_F$ (perché coincidono sui generatori); vogliamo mostrare che $\widetilde{f} = q \circ \overline{f}$ è una derivazione:

$$(\widetilde{f}(xy), xy) = \overline{f}(xy) = \overline{f}(x)\overline{f}(y) = (\widetilde{f}(x), x)(\widetilde{f}(y), y) = (\widetilde{f}(x) + x\widetilde{f}(y), xy)$$

e quindi $\widetilde{f}(xy) = x\widetilde{f}(y) + \widetilde{f}(x)$. Con le notazioni del teorema 70 abbiamo un isomorfismo (naturale) $\eta_M : \mathrm{Der}\,(F, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(IF, M)$ ed $\eta_M(\widetilde{f})(s-1) = \widetilde{f}(s) = f(s-1)$; cioè $\eta_M(\widetilde{f})$ estende f. □

Corollario 83. Se F è un gruppo libero, per $n \geq 2$, $H^n(F, A) = H_n(F, A) = 0$.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$0 \longrightarrow IF \longrightarrow \mathbb{Z}[F] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

è una risoluzione $\mathbb{Z}[F]$-libera di $\mathbb{Z}$. □

Capitolo 6

Coomologia delle algebre di Lie

05/05/08

Definizione 54. Sia K un campo. Un'*algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale su K insieme con un'applicazione bilineare

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

detta *bracket* che soddisfa le condizioni

(1) $[x, x] = 0$,

(2) $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$.

La seconda condizione è detta *identità di Jacobi*. Osserviamo che da queste condizioni e dalla bilinearità del bracket si ottiene $[x, y] = -[y, x]$.

Un *omomorfismo* di algebre di Lie è una funzione $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ che sia K-lineare e verifichi

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)].$$

Esempio 22. Le seguenti sono algebre di Lie

- $gl(n, K)$ (matrici $n \times n$) con il prodotto $[A, B] = AB - BA$;
- $sl(n, \mathbb{C})$ (matrici a traccia nulla);
- $so(n, \mathbb{C}), so(n, \mathbb{R})$ (matrici che verificano $A^T = -A$);
- $su(n, \mathbb{C})$ (matrici che verificano $\overline{A}^T = -A$).

Ad ogni gruppo di Lie è associata un'algebra di Lie come spazio tangente[1]; ad esempio al gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ è associata l'algebra $gl(n, \mathbb{C})$ con l'applicazione $e : gl(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ (l'esponenziale di matrici).

[1] Si veda [BM75]

Si può dimostrare che se $\operatorname{char} K = 0$ ogni algebra di Lie si può immergere in un qualche $gl(n, K)$.

Definizione 55. Un *ideale* in un algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è un sottospazio $I \subseteq \mathfrak{g}$ tale che
$$\forall x \in \mathfrak{g}, y \in I : \quad [x, y] \in I.$$

Esempio 23. Consideriamo l'algebra delle matrici triangolari superiori; le matrici strettamente triangolari superiori (cioè quelle con diagonale nulla) formano un ideale.

Definizione 56. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice *abeliana* se per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$ $[x, y] = 0$.

Nelle algebre di matrici questo vuol dire $AB = BA$ (da cui il nome abeliana).

6.1 Algebra inviluppante universale

Vogliamo definire l'analogo del *group ring* $\mathbb{Z}[G]$ nel contesto delle algebre di Lie.

Algebra tensoriale Sia V uno spazio vettoriale su K, definiamo per $n \geq 1$
$$T_n V = \underbrace{V \otimes_K V \otimes_K \cdots \otimes_K V}_{n \text{ volte}}$$
e $T_0 V = K$. L'*algebra tensoriale* associata a V è lo spazio vettoriale $\oplus_{n \in \mathbb{N}} T_n V$ con il prodotto definito da
$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \in T_{m+n} V$$
Il funtore $T\cdot : \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{Alg}_K$ è aggiunto sinistro del funtore dimenticante $\mathfrak{Alg}_K \to \mathfrak{V}_k$.

L'algebra tensoriale è la *K-algebra libera su V*; cioè per ogni K-algebra A ed applicazione lineare $f : V \to A$ esiste un'unico omomorfismo di algebre $Tf : TV \to A$ che estende f. Infatti per ogni n
$$Tf(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) f(v_2) \cdots f(v_n)$$
è multilineare in $v_1, \ldots, v_n$ e quindi definisce un'unica mappa lineare $T_n V \to A$ e poi si usa la proprietà universale della somma ottenendo una mappa lineare $Tf : TV \to A$ che (si vede facilmente) è un omomorfismo di algebre.

Definizione 57. Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie, l'*algebra inviluppante universale* associata ad $\mathfrak{g}$ è l'algebra $U\mathfrak{g} = T\mathfrak{g}/I$ dove $I \subseteq T\mathfrak{g}$ è l'ideale generato dagli elementi

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \quad x, \in \mathfrak{g}.$$

In pratica introduciamo su $T\mathfrak{g}$ le relazioni $[x, y] = x \otimes y - y \otimes x$. $U\mathfrak{g}$ è un'algebra associativa con unità ma possiamo metterci una struttura di algebra di Lie con il prodotto

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{v}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U\mathfrak{g}$$

(questo si può fare con ogni algebra associativa). In questo modo (per via delle relazioni introdotte) l'inclusione $\mathfrak{g} \to T_1\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ è un omomorfismo di algebre di Lie. Si può dimostrare il seguente (per una dimostrazione si veda [Jac79])

Teorema 84. L'inclusione $\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ è un'immersione di algebre di Lie.

Definizione 58. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ *agisce* su di uno spazio vettoriale V se esiste un omomorfismo di algebre di Lie

$$\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$$

dove $\operatorname{End}(V)$ è un'algebra di Lie col bracket $[\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$.

Uno spazio vettoriale V si dice $\mathfrak{g}$-*modulo* se $\mathfrak{g}$ agisce su V. In questo caso l'azione di $\mathfrak{g}$ su V si estende ad un omomorfismo di algebre di Lie $U\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$. Infatti essa si estende ad un omomorfismo di algebre $T\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ che conserva il prodotto bracket (se mettiamo su $T\mathfrak{g}$ la solita struttura di algebra di Lie) e il fatto che $\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ sia un omomorfismo di algebre di Lie fa si che l'omomorfismo $T\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ rispetti le relazioni e quindi passi al quoziente definendo un omomorfismo $U\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$. Cioè, in analogia con il caso dei gruppi, le nozioni di $\mathfrak{g}$-modulo e di $U\mathfrak{g}$-modulo sono equivalenti. Se V è un qualunque K-spazio vettoriale possiamo mettere su V la struttura di $U\mathfrak{g}$-modulo banale, cioè quella ottenuta prendendo come azione $\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ la mappa nulla.

Definizione 59. La mappa $\varepsilon : U\mathfrak{g} \to K$, definita da $\varepsilon(x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$ si chiama *augmentazione*; $I\mathfrak{g} = \operatorname{Ker} \varepsilon$ si dice *ideale di augmentazione*.

Chiamiamo $i : \mathfrak{g} \hookrightarrow U\mathfrak{g}$ l'immersione; allora $I\mathfrak{g} = \langle i(\mathfrak{g}) \rangle$.

6.2 Coomologia delle algebre di Lie

Definizione 60. Se A è un $U\mathfrak{g}$-modulo definiamo la *coomologia* di $\mathfrak{g}$ a coefficienti in A come

$$H^n(\mathfrak{g}, A) = \operatorname{Ext}^n_{U\mathfrak{g}}(K, A)$$

dove K è lo $U\mathfrak{g}$-modulo banale.

Esempio 24. In analogia con il caso dei gruppi si ha

$$H^0(\mathfrak{g}, A) = A^{\mathfrak{g}} = \{a \in A : \, xa = 0 \,\forall x \in \mathfrak{g}\}$$

gli elementi di $A^{\mathfrak{g}}$ sono gli *invarianti per l'azione di* $\mathfrak{g}$.

Definizione 61. Un'applicazione lineare $d : \mathfrak{g} \to A$ è una *derivazione* se per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$

$$d([x, y]) = xd(y) - yd(x).$$

Una *derivazione interna* è un'applicazione lineare $d : \mathfrak{g} \to A$ tale $\exists\, a \in A, \forall x \in \mathfrak{g} : \, d(x) = xa$.

Osservazione 40. $H^n(\mathfrak{g}, A)$, $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}, A)$ e $\operatorname{IDer}(\mathfrak{g}, A)$ sono K-spazi vettoriali.

Ancora una volta abbiamo che $H^1(\mathfrak{g}, A) \cong \operatorname{Der}(\mathfrak{g}, A)/\operatorname{IDer}(\mathfrak{g}, A)$.

$H^2(\mathfrak{g}, A)$ classifica ancora delle estensioni. In particolare ci interessano le successioni esatte del tipo

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

dove i e p sono omomorfismi di algebre di Lie ed A è un'algebra abeliana. Come per i gruppi $\mathfrak{g}$ agisce su A; sia $s : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ una sezione *lineare* di p (che esiste perché $\mathfrak{g}$ ed $\mathfrak{h}$ sono spazi vettoriali). Definiamo l'azione di $\mathfrak{g}$ su iA come

$$gi(a) = [s(g), i(a)].$$

Osserviamo che $iA = \operatorname{Ker} p$ è un'ideale di $\mathfrak{h}$ e quindi $gi(a) \in iA$. Tale azione non dipende dalla sezione scelta, infatti se $t : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un'altra sezione, allora per ogni $g \in \mathfrak{g}$ $t(g) = s(g) + i(a')$ e per ogni $a \in A$ $[t(g), i(a)] = [s(g) + i(a'), i(a)] = [s(g), i(a)] + [i(a'), i(a)]$ ma $[i(a'), i(a)] = i([a', a]) = i(0) = 0$ perché A è abeliana.

Definizione 62. Un'estensione di $\mathfrak{g}$ tramite un $\mathfrak{g}$-modulo A è una successione esatta di algebre di Lie

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

dove A è considerata come algebra abeliana e l'azione di $\mathfrak{g}$ su A indotta dalla successione coincide con la struttura di $\mathfrak{g}$-modulo di A.

Anche qui definiamo il *prodotto semidiretto* tra un $\mathfrak{g}$-modulo A e $\mathfrak{g}$ come l'algebra di Lie sullo spazio vettoriale $A \times \mathfrak{g}$ definita da

$$[(a_1, g_1), (a_2, g_2)] = (g_1 a_2 - g_2 a_1, [g_1, g_2]).$$

Questo ci permette di definire l'*estensione split* di $\mathfrak{g}$ tramite A:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

che è una successione esatta di algebre di Lie. Come al solito definiamo due estensioni equivalenti se esiste un omomorfismo di algebre di Lie $\mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{h}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & \mathfrak{h}_2 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Indichiamo ancora con $M(\mathfrak{g}, A)$ l'insieme delle estensioni di $\mathfrak{g}$ tramite A modulo equivalenza. Si può dimostare il seguente (per una dimostrazione si veda [HS97])

Teorema 85. Siano $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie ed A un $\mathfrak{g}$-modulo; esiste una corrispondenza biunivoca $H^2(\mathfrak{g}, A) \leftrightarrow M(\mathfrak{g}, a)$

6.2.1 Risoluzione speciale

Possiamo costruire una risoluzione $\mathfrak{g}$-libera di K, visto come $\mathfrak{g}$-modulo banale, "molto conveniente".

Sia $\mathfrak{g}$ algebra di Lie e V il suo spazio vettoriale sottostante. Utilizziamo la seguente notazione Se $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \bigwedge^n V$ scriviamo

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$$

e se $u \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \in W \otimes_K \bigwedge^n V$ scriviamo

$$u \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = u\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$$

Costruiamo il complesso

$$C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0$$

dove per $n \geq 1$ $C_n = U\mathfrak{g} \otimes_K \bigwedge^n V$, $C_0 = U\mathfrak{g}$, ε è l'augmentazione e il bordo è definito da

$$\partial_n \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i \langle x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n \rangle +$$
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \langle [x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, \hat{x_j}, \ldots, x_n \rangle.$$

Osserviamo che $U\mathfrak{g}$ è un $U\mathfrak{g}$-modulo nel solito modo e ∂_n basta definirla sugli elementi del tipo $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ perché imponiamo che sia una mappa di $\mathfrak{g}$-moduli.

Si dimostra[2] in modo non difficile ma molto laborioso che questa è una risoluzione libera di K.

Corollario 86. $H^s(\mathfrak{g}, A) = 0$, $\forall s \geq \dim g + 1$.

6.3 Algebre semisemplici e risolubili

06/05/08

In questa sezione K è un campo a caratteristica 0 ed A un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione finita.

Definizione 63. Un'algebra di Lie si dice *semisemplice* se non ha ideali abeliani (eccetto (0)).

Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ può essere vista come $\mathfrak{g}$-modulo tramite l'azione (su se stessa) definita da

$$xy = [x, y].$$

In questo modo gli ideali sono tutti e soli i $\mathfrak{g}$-sottomoduli. Per i seguenti teoremi si può vedere [Jac79] e [HS97].

Teorema 87. Un'algebra di Lie semisemplice è somma diretta di ideali che sono semplici (come algebre di Lie), cioè che non hanno ideali propri:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_n$$

e la somma diretta è (anche) somma di algebre di Lie.

Teorema 88. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice ed A un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione finita *semplice e non banale*, allora

$$H^q(\mathfrak{g}, A) = 0 \quad \forall q \geq 0$$

[2] si veda [HS97]

6.3.1 Lemmi di Whitehead

Proposizione 89 (Primo lemma di Whitehead)**.** Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice ed A è un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione finita, allora $H^1(\mathfrak{g}, A) = 0$.

Dimostrazione. Per assurdo, sia A un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione minima (e finita) tale che $H^1(\mathfrak{g}, A) \neq 0$. Supponiamo che A non sia semplice, allora esiste un ideale $A' \subsetneq A$ con $A' \neq (0)$ e possiamo considerare la successione esatta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A/A' \longrightarrow 0$$

Passando alla successione esatta lunga in omologia abbiamo

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, A') \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, A) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, A/A') \longrightarrow \cdots$$

ma $\dim A', \dim A/A' < \dim A$ e quindi $H^1(\mathfrak{g}, A') = H^1(\mathfrak{g}, A/A') = 0 \Rightarrow H^1(\mathfrak{g}, A) = 0$ che è assurdo.

Quindi A è semplice e per il teorema precedente è anche banale. Ora $H^1(\mathfrak{g}, A) \cong \mathrm{Der}\,(\mathfrak{g}, A)/\mathrm{IDer}\,(\mathfrak{g}, A)$ ma A banale $\Rightarrow \mathrm{IDer}\,(\mathfrak{g}, A) = (0)$ e quindi $H^1(\mathfrak{g}, A) \cong \mathrm{Der}\,(\mathfrak{g}, A)$.

Ora se $d : \mathfrak{g} \to A$ è una derivazione, $d([x, y]) = xd(y) - yd(x) = 0$ perché A è banale. Perciò $\mathrm{Der}\,(G, A) \cong \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], A)$. $\mathfrak{g}$ è semisemplice quindi $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_n$ con gli $\mathfrak{h}_i$ semplici. Se $i \neq j$ allora $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] = 0$, da cui

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{h}_n, \mathfrak{h}_n]$$

Se fosse $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] = 0$ $\mathfrak{h}_i$ sarebbe un ideale abeliano e questo non è possibile perché $\mathfrak{g}$ è semisemplice, allora ($\mathfrak{h}_i$ è semplice) $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] = \mathfrak{h}_i$. Perciò

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{h}_n, \mathfrak{h}_n] = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_n = \mathfrak{g}$$

e $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0 \Rightarrow H^1(\mathfrak{g}, A) = \mathrm{Der}\,(\mathfrak{g}, A) = 0$ che è assurdo. □

Definizione 64. Un $\mathfrak{g}$-modulo A si dice *riducibile* se è somma diretta di $\mathfrak{g}$-moduli semplici.

Teorema 90 (Weyl)**.** Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice ogni $\mathfrak{g}$-modulo A di dimensione finita è riducibile.

Dimostrazione. Per induzione su $\dim_K A$; se $\dim_K A = 1$ A è già semplice e va bene. Vediamo il passo induttivo, se A è semplice non c'è nulla da dimostrare. Sia $A' \subsetneq A$ un $\mathfrak{g}$-sottomodulo e consideriamo la successione esatta (dove $A'' = A/A'$)

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

Allora la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A'', A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, A') \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Hom}_K(A', A') \longrightarrow 0$$

è esatta (si tratta di spazi vettoriali). Se A e B sono $\mathfrak{g}$-moduli possiamo mettere una struttura di $\mathfrak{g}$-modulo su $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ nel seguente modo (dove $f : A \to B$ ed $x \in \mathfrak{g}$)

$$(xf)(a) = xf(a) - f(xa)$$

e in questo modo la successione sopra diventa una successione esatta di $\mathfrak{g}$-moduli. Gli invarianti di questa azione sono le applicazioni lineari $f : A \to B$ con $f(xa) = xf(a)$ per ogni $x \in \mathfrak{g}, a \in A$, cioè gli omomorfismi di $\mathfrak{g}$-moduli; in particolare $H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A, B)) = \mathrm{Hom}_{U\mathfrak{g}}(A, B)$ Adesso consideriamo la successione esatta in coomologia

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A'', A')) \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A, A')) \longrightarrow \\ H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A', A')) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A'', A')) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

per il primo lemma di Whitehead $H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A'', A')) = 0$ e quindi possiamo riscrivere la successione come

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{U\mathfrak{g}}(A'', A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{U\mathfrak{g}}(A, A') \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Hom}_{U\mathfrak{g}}(A', A') \longrightarrow 0$$

e quindi esiste $\delta : A \to A'$, omomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli, tale che $\nu^*(\delta) = \delta \circ \nu = id_{A'}$ e la successione

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

spezza. In particolare $A \cong A' \oplus A''$ e per ipotesi induttiva A' ed A'' sono somme dirette di $\mathfrak{g}$-moduli semplici. □

Proposizione 91 (Secondo lemma di Whitehead)**.** Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice ed A un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione finita, allora $H^2(\mathfrak{g}, A) = 0$.

Dimostrazione. Per assurdo sia A un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione minima tale che $H^2(\mathfrak{g}, A) \neq 0$. Se A non è semplice allora esiste un sottomodulo proprio $A' \subsetneq A$ e possiamo considerare la successione esatta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A/A' \longrightarrow 0$$

e come nel primo lemma di Whitehead passando alla successione esatta in coomologia ed osservando che $H^2(\mathfrak{g}, A') = H^2(\mathfrak{g}, A/A') = 0$ per minimalità di A si ha che $H^2(\mathfrak{g}, A) = 0$ che è assurdo.

Dunque A è semplice e per il teorema 88 deve essere banale e quindi $A = K$ (tutti i sottospazi sarebbero $\mathfrak{g}$-moduli). Noi sappiamo che $H^2(\mathfrak{g}, K)$ classifica le estensioni, perciò ci basta dimostrare che ogni estensione di $\mathfrak{g}$ tramite K spezza. Consideriamo

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

Sia $s : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ una sezione lineare di p. s induce su iK l'azione banale ma possiamo fare agire $\mathfrak{g}$ su tutto $\mathfrak{h}$ nel seguente modo

$$xh = [s(x), h]$$

Osserviamo che l'azione è ben definita; bisogna infatti che $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_K(\mathfrak{h})$ sia un omomorfismo di algebre di Lie, cioè che per ogni $x, y \in \mathfrak{g}, h \in \mathfrak{h}$ valga $[s([x, y]), h] = [[s(x), s(y)], h]$; ma $s([x, y]) = [s(x), s(y)] + k$ con $k \in K$ e, come spazi vettoriali, $\mathfrak{h} = K \oplus s(\mathfrak{g})$. Quindi $h = k' + s(z)$ e

$$[s([x, y]), h] = [[s(x), s(y)], h] + [k, h]$$

e $[k, h] = [k, k'] + [k, s(z)] = 0$ dove $[k, k'] = 0$ perché K è abeliana e $[k, s(z)] = 0$ perché K è banale.

Con questa azione K è un $\mathfrak{g}$-sottomodulo di $\mathfrak{h}$ e per il teorema di Weyl ha un complemento diretto, cioè $\mathfrak{h} = K \oplus \mathfrak{h}_1$ come $\mathfrak{g}$-moduli. Osserviamo che $\mathfrak{h}_1$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{h}$, infatti $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \subseteq [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1] = [K, \mathfrak{h}_1] + [s(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_1$ dove $[K, \mathfrak{h}_1] = 0$ come prima e $[s(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_1$ per definizione dell'azione di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{h}$ (e per il fatto che $\mathfrak{h}_1$ è un sottomodulo).

Ora possiamo scegliere la sezione s in modo che $s(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h}_1$; per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$ chiamiamo $k_{xy} \in K$ tale che $s([x, y]) = [s(x), s(y)] + k_{xy}$, allora $k_{xy} = s([x, y]) - [s(x), s(y)] \in \mathfrak{h}_1 \cap K \Rightarrow k_{xy} = 0$ ed s è omomorfismo di algebre di Lie. In particolare la successione spezza. $\square$

12/05/08

6.3.2 Il teorema di Levi-Malcev

Definizione 65. Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ la sua *serie derivata* è la successione di ideali definita da

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g}_{n-1}, \mathfrak{g}_{n-1}]$$

$\mathfrak{g}$ si dice *risolubile* se esiste $n \geq 0$ tale che $\mathfrak{g}_n = 0$ e il minimo di tali n si dice *lunghezza derivata* di $\mathfrak{g}$.

Esempio 25. Dato un campo K, la sottoalgebra di $gl(n, K)$ delle matrici triangolari superiori è risolubile. Infatti se $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}_n$ allora $i < j + n \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Lemma 92. Sia $0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{i} \to 0$ successione esatta di algebre di Lie, allora $\mathfrak{g}$ è risolubile se e solo se lo sono $\mathfrak{h}$ ed $\mathfrak{i}$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che sia $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia risolubile e sia $n = l(\mathfrak{g})$, allora $\mathfrak{i}_n = \pi(\mathfrak{g}_n) = 0$ e $\mathfrak{h}_n \subseteq \mathfrak{g}_n = 0$.

Viceversa siano $\mathfrak{i}$ ed $\mathfrak{h}$ risolubili e $n = l(\mathfrak{h})$, $m = l(\mathfrak{i})$. Allora $\pi(\mathfrak{g}_m) = \mathfrak{i}_m = 0 \Rightarrow \mathfrak{g}_m \subseteq \mathfrak{h} \Rightarrow \mathfrak{g}_{m+n} \subseteq \mathfrak{h}_n = 0$. □

Lemma 93. Se gli ideali $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ sono risolubili allora anche $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ lo è.

Dimostrazione. Basta considerare la successione esatta $0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \to 0$. □

Dunque ogni algebra di Lie di dimensione finita ha un ideale risolubile massimale $\mathfrak{r}$. $\mathfrak{r}$ si chiama *radicale* di $\mathfrak{g}$.

Proposizione 94. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie ed $\mathfrak{r}$ il suo radicale, allora $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ è semisemplice.

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ un ideale abeliano di $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ e consideriamo la successione

$$0 \longrightarrow \mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{r} \longrightarrow 0$$

$\mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ è abeliano e quindi risolubile mentre $\mathfrak{r}$ è risolubile per definizione; allora $\mathfrak{a}$ è risolubile e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$; da cui $\mathfrak{a}/\mathfrak{r} = (0)$. □

Teorema 95 (Levi-Malcev)**.** Ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione finita è l'estensione split di un'algebra di Lie semisemplice tramite il radicale $\mathfrak{r}$ di $\mathfrak{g}$.

Dimostrazione. Per induzione sulla lunghezza derivata di $\mathfrak{r}$. Se $l(\mathfrak{r}) = 1$ allora $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$ ed $\mathfrak{r}$ è abeliano; in particolare $\mathfrak{r}$ è un $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$-modulo (l'azione di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{r}$ passa al quoziente). Ma $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ è semisemplice e per il secondo lemma di Whitehead $H^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = 0$; segue che la successione

$$0 \longrightarrow \mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \longrightarrow 0$$

spezza. Se invece $l(\mathfrak{r}) > 1$ consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{r}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \arrow[r] & \mathfrak{g}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \arrow[r] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove π sono le proiezioni al quoziente. $\mathfrak{r}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ è un $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$-modulo e la seconda riga è un'estensione. Allora sempre usando il secondo lemma di Whitehead e il fatto che $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ è semisemplice si ha che la seconda riga spezza. In particolare esiste una sezione $s : \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \to \mathfrak{g}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ che è un omomorfismo di algebre di Lie. Sia $s(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}) = \mathfrak{h}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$; dal fatto che s è iniettivo abbiamo $\mathfrak{h}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ e quindi è semisemplice ed $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ è il radicale di $\mathfrak{h}$. Possiamo quindi considerare

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & \\
{[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] & 0 \\
\mathfrak{h} \arrow[d] & & & \\
\mathfrak{h}/[\mathfrak{r},\mathfrak{r}] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, bend left, "t"] & \mathfrak{g}/[\mathfrak{r},\mathfrak{r}] \arrow[r] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[ll, bend left, "s"] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

Dove la colonna spezza perché $l([\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]) = l(\mathfrak{r}) - 1$ e si applica l'ipotesi induttiva. Quindi esiste una sezione $t : \mathfrak{h}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \to \mathfrak{h}$ che è omomorfismo di algebre di Lie. Consideriamo quindi l'omomorfismo $t \circ s : \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \to \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$; chiamiamo $\pi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ e $\pi_2 : \mathfrak{g}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ le proiezioni al quoziente, allora $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ è ancora la proiezione al quoziente e $\pi \circ t \circ s = \pi_2 \circ \pi_1 \circ t \circ s = \pi_2 \circ s = id_{\mathfrak{g}/\mathfrak{r}}$ e $t \circ s$ è una sezione per l'estensione originale che in questo modo spezza. $\square$

Teorema 96 (Lie)**.** Sia K un campo di caratteristica 0 e algebricamente chiuso. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie risolubile su K e sia ρ una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su K. Allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{g}^*$ ed una base di V tali che $\forall x \in \mathfrak{g}$ sia

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(x) \end{pmatrix}$$

Teorema 97 (Ado)**.** Sia K un campo a caratteristica 0, allora ogni algebra di Lie di dimensione finita possiede un embedding in $\operatorname{End} V$ con V spazio vettoriale di dimensione finita.

Le algebre di Lie semisemplici su $\mathbb{C}$ sono tutte e sole le somme di copie di $so(n, \mathbb{C})$, $sp(n, \mathbb{C})$, $sl(n, \mathbb{C})$ più cinque algebre speciali: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Questo fatto, insieme ai teoremi precedenti, ci permette di caratterizzare le algebre di Lie nel caso complesso.

Capitolo 7

Cenni sulle successioni spettrali

Definizione 66. Un *modulo bigraduato differenziale* E su di un anello R è una collezione di R-moduli E^{pq} con $p, q \in \mathbb{Z}$ ed un differenziale $d : E \to E$ di grado $(r, 1-r)$ oppure $(-r, r-1)$ che soddisfi $d \circ d = 0$.

Definizione 67. Una *successione spettrale* è una famiglia di R-moduli bigraduati differenziali $E = (E_r^{*,*}, d_r)$ dove $r \in \mathbb{Z}^+$ e d_r di grado $(r, 1-r)$ per ogni r (oppure di grado $(-r, r-1)$ per ogni r) e per ogni r vale $E_{r+1}^{pq} = H^{pq}(E_r^{*,*}, d_r)$.

I moduli bigraduati $E_r^{*,*}$ si dicono *pagine*. Una successione spettrale si dice di *primo quadrante* se per ogni $r \in \mathbb{Z}^+$ $p < 0$ o $q < 0 \Rightarrow E_r^{pq} = 0$. Osserviamo che una successione è di primo quadrante se e solo la pagina E_1 lo è.

Osservazione 41. Se (E_r, d_r) (con d_r di grado $(r, 1-r)$) è una successione di primo quadrante allora per ogni p, q l'elemento $E_r^{p,q}$ si stabilizza (cioè esiste k tale che per ogni $r \geq k$, $E_r^{p,q} = E_k^{p,q}$). Infatti sia $r > p$ ed $r > q+1$, allora $q + 1 - r < 0 \Rightarrow E_r^{p+r,q+1-r} = 0$ e $p - r < 0 \Rightarrow E_r^{p-r,q-1+r} = 0$ da cui $E_{r+1}^{p,q} = H^{p,q}(E_r) = E_r^{p,q}$.

Omettendo gli indici in alto chiamiamo $Z_2 = \operatorname{Ker} d_2$, $B_2 = \operatorname{Im} d_2$ (quindi $E_3 = Z_2/B_2$), $Z_3 = \operatorname{Ker} d_3$, $B_3 = \operatorname{Im} d_3$. Ora $d_3 : Z_2/B_2 \to Z_2/B_2$ e possiamo considerare Z_3 e B_3 come sottomoduli di Z_2 ed iterando otteniamo

$$B_2 \subseteq B_3 \subseteq B_4 \subseteq \cdots \subseteq Z_4 \subseteq Z_3 \subseteq Z_2$$

Definiamo quindi $B_\infty = \cup_{i=0}^\infty B_i$, $Z_\infty = \cap_{i=0}^\infty Z_i$ ed $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$.

7.0.3 Moduli filtrati differenziali

13/05/08

Definizione 68. Una *filtrazione* F di un R-modulo A è una famiglia di sottomoduli $F^pA = F^p$ con $p \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\cdots \subseteq F^{p+1} \subseteq F^p \subseteq F^{p-1} \subseteq \cdots \subseteq A.$$

Questa è una filtrazione discendente, in modo analogo si definiscono le filtrazioni ascendenti.

Esempio 26. Sia $A = \mathbb{Z}$ ed $F^p\mathbb{Z} = 2^p\mathbb{Z}$; questa è una filtrazione infinita a sinistra ma finita a destra.

$$\cdots \subseteq F^p\mathbb{Z} \subseteq \cdots \subseteq F^0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Definizione 69. Il *modulo graduato associato ad una filtrazione* è definito come $E_0^p(A) = F^pA/F^{p+1}A$ (o, nel caso di una filtrazione ascendente $E_0^p(A) = F^pA/F^{p-1}A$).

Supponiamo di lavorare con spazi vettoriali (cioè R è un campo) e di avere una filtrazione finita ($F^0 = A$, $F^{N+1} = 0$), allora dalla successione esatta $0 \to F^1 \to F^0 \to E^0(A) \to 0$ (che spezza perché gli oggetti sono spazi vettoriali) abbiamo che $A = F^0 = E_0^0(A) \oplus F^1$ ed iterando $A = \oplus_{p=0}^N E_0^p(A)$.

In generale però non è detto che si possa ricostruire il modulo A conoscendo tutti gli $E_0^p(A)$; potrebbero esserci problemi di estensioni. Se riuscissimo a ricostruire induttivamente tutti gli F^pA allora potremmo ricostruire anche A.

Sia H^* un modulo graduato *filtrato* possiamo filtrare anche H^n definendo

$$F^pH^n = F^pH^* \cap H^n$$

e possiamo bigraduare il modulo $E_0H^* = \oplus_{p\in\mathbb{Z}}F^pH^*/F^{p+1}H^* = \oplus_{p\in\mathbb{Z}}E_0^pH^*$ nel seguente modo

$$E_0^{pq}(H^*, F) = F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q}.$$

Definizione 70. Una successione spettrale $(E_r^{*,*}, d_r)$ *converge* al modulo graduato H^* se esiste una filtrazione F di H^* tale che $E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F)$.

Definizione 71. Un *modulo filtrato graduato differenziale* è un modulo

(1) $A = \oplus_{n=0}^\infty A_n$ (graduato),

(2) con un differenziale $d : A \to A$ di grado 1 o -1 che verifica $d \circ d = 0$,

(3) con una filtrazione F di A tale che $d : F^pA \to F^pA$ (cioè d rispetta la filtrazione).

Vogliamo filtrare la coomologia $H^*(A)$, il fatto che d rispetta la filtrazione ci permette di considerare (F^pA, d) come un complesso ed in questo modo l'inclusione $i : F^pA \to A$ è un morfismo di complessi. Possiamo quindi considerare $i_* : H^*(F^pA, d) \to H^*(A, d)$ e definire $F^pH^*(A) = \operatorname{Im} i_*$ (questa applicazione può non essere iniettiva, ma non importa).

Teorema 98. Ogni modulo filtrato graduato differenziale (A, d, F) determina una successione spettrale $(E_r^{*,*}, d_r)$, $r = 1, 2, \ldots$ con d_r di grado $(r, 1-r)$ (o, in notazione omologica, di grado $(-r, r-1)$) ed $E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A)$.

Inoltre se la filtrazione è limitata (cioè se per ogni grado n esistono $s(n) \leq t(n) \in \mathbb{Z}$ tali che $F^{s(n)}A^n = 0$ e $F^{t(n)}A^n = A$) allora la successione converge ad $H^*(A, d)$ cioè

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*(A,d)) = F^pH^{p+q}(A,d)/F^{p+1}H^{p+q}(A,d).$$

Una volta determinati gli $E_0^{p,q}$ si può tentare di ricostruire $H^n(A, d)$ (si dovranno utilizzare i p, q che verificano $p + q = n$).

7.0.4 Coppie esatte

Definizione 72. Una *coppia esatta* è data da due moduli A, B e dai morfismi α, β, γ tali che il triangolo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] & & A \arrow[dl, "\beta"] \\ & B \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

sia esatto.

Esempio 27. Data una successione esatta di complessi

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{b} B \longrightarrow 0$$

Possiamo considerare la successione esatta lunga in omologia

$$\begin{tikzcd} H^*(A) \arrow[rr, "a^*"] & & H^*(A) \arrow[dl, "b^*"] \\ & H^*(B) \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

che è una coppia esatta

Esempio 28 (Bocksten). Consideriamo la successione $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$ (dove la prima mappa è la moltiplicazione per p) e sia C un complesso di gruppi liberi abeliani, allora applicando il funtore $C \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ otteniamo la successione $0 \to C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$ che è esatta perché il complesso C è libero. Osservando che $C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong C$ e prendendo la successione esatta lunga in omologia si ottiene

$$\begin{tikzcd} H^*(C) \arrow[rr] & & H^*(C) \arrow[dl] \\ & H^*(C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

che è una coppia esatta.

Data una coppia esatta possiamo costruirne un'altra. Sia

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

coppia esatta di moduli. Definiamo $d = j \circ k : E \to E$; d è un differenziale, infatti $d \circ d = j \circ (k \circ j) \circ k = 0$. Siano $E' = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$, $D' = i(d)$ ed $i' : D' \to D'$, $i(\gamma) \mapsto i(i(\gamma))$. Costruiamo quindi

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "i'"] & & D' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

dove $j'(i(\gamma)) = [j(\gamma)]$ e $k'([e]) = k(e)$. Osserviamo che le mappe sono ben definite, infatti se $i(\gamma_1) = i(\gamma_2)$ allora $\gamma_2 = \gamma_1 + k(e)$ con $e \in E$ e $[j(\gamma_2)] = [j(\gamma_1) + d(e)] = [j(\gamma_1)]$ mentre $k(e + d(e')) = k(e) + k \circ j \circ k(e') = k(e)$, inoltre $e \in \operatorname{Ker} d \Rightarrow k(e) \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$. Infine il triangolo costruito è esatto, vediamo perché. Sia $i'(i(\gamma)) = 0$, allora $i(\gamma) = k(e)$ e $d(e) = j \circ k(e) = j \circ i(\gamma) = 0$; sia ora $j'(i(\gamma)) = 0 \Rightarrow j(\gamma) = d(e) = j(k(e)) \Rightarrow \gamma = k(e) + i(\gamma_1)$ ed $i(\gamma) = i \circ k(e) + i(i(\gamma_1)) = i'(i(\gamma_1))$, inoltre se $k'([e]) = k(e) = 0$ allora $e = j(\gamma)$ e $[e] = j'(i(\gamma))$. Quindi (D', E', i', j', k') è una coppia esatta.

Definizione 73. (D', E', i', j', k') si dice *coppia derivata* di (D, E, i, j, k).

In questo modo se C è una coppia esatta possiamo costruire le successive coppie derivate $C, C', C'', \ldots, C^{(n)}$.

Teorema 99. Siano $D^{*,*}$ ed $E^{*,*}$ moduli bigraduati e

$$\begin{tikzcd} D^{*,*} \arrow[rr, "i"] & & D^{*,*} \arrow[dl, "j"] \\ & E^{*,*} \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

coppia esatta dove i, j e k sono morfismi di moduli bigraduati con i di grado $(-1,1)$, j di grado $(0,0)$ e k di grado $(1,0)$. Allora è determinata una successione spettrale $(E_r^{*,*}, d_r)$ con $E_1^{*,*} = E^{*,*}, E_2^{*,*} = (E^{*,*})', \ldots, E_r^{*,*} = (E^{*,*})^{(r-1)}$ e $d_r = j^{(r-1)} \circ k^{(r-1)}$.

Dimostrazione. Che $E_{r+1}^{p,q} = H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$ è vero per definizione; quindi l'unica cosa da dire è che d_r ha grado $(r, 1-r)$. Ma si mostra facilmente per induzione che $i^{(r)}$ ha grado $(-1,1)$, $j^{(r)}$ ha grado $(r,-r)$ e $k^{(r)}$ ha grado $(1,0)$; perciò $d_r = j^{(r-1)} \circ k^{(r-1)}$ ha grado $(r-1+1, -r+1) = (r, 1-r)$. □

Torniamo adesso al problema di calcolare l'omologia di un complesso filtrato. Sia A un modulo graduato differenziale; possiamo considerare la successione esatta corta di complessi $0 \to F^{p+1}A \to F^pA \to F^pA/F^{p+1}A \to 0$ (è una successione di complessi perché d rispetta la filtrazione) e passare alla successione esatta lunga in coomologia

$$H^{p+q}(F^{p+1}A) \to H^{p+q}(F^pA) \to H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A) \to H^{p+q+1}(F^{p+1}A) \to H^{p+q+1}(F^pA) \to H^{p+q+1}(F^pA/F^{p+1}A)$$

Definiamo i moduli bigraduati $D^{p,q} = H^{p+q}(F^pA)$ ed $E^{p,q} = H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A)$, possiamo quindi riscrivere la successione esatta lunga come

$$D^{p+1,q-1} \to D^{p,q} \to E^{p,q} \to D^{p+1,q} \to D^{p,q+1} \to E^{p,q+1}.$$

Abbiamo, cioè, costruito la coppia esatta

$$\begin{tikzcd} D^{*,*} \arrow[rr, "i"] & & D^{*,*} \arrow[dl, "j"] \\ & E^{*,*} \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

dove i ha grado $(-1,1)$, j ha grado $(0,0)$ e k ha grado $(1,0)$. Da questa possiamo estrarre una successione spettrale usando il teorema 99 (perché le mappe hanno il grado giusto) e questa successione coincide con quella del teorema 98. Però adesso conosciamo tutte le pagine e tutti i differenziali; in questo modo possiamo calcolare $E_\infty^{*,*}$ e quindi $H^*(A)$.

Bibliografia

[AHS90] J. Adámek, H. Herrlich, and G.E. Strecker. *Abstract and concrete categories: the joy of cats*. Wiley, 1990.

[Ber91] P. Bernays. *Axiomatic Set Theory*. Courier Dover Publications, 1991.

[BM75] W.M. Boothby and W. Munger. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic Press New York, 1975.

[GY03] S.I. Gelfand and I. Manin Yuri. *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Hat] A. Hatcher. *Spectral sequences in Algebraic Topology*.

[Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[HS97] P.J. Hilton and U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra*. Springer, 1997.

[Jac79] N. Jacobson. *Lie Algebras*. Courier Dover Publications, 1979.

[Lan02] S. Lang. *Algebra*. Springer, 2002.

[McC00] J. McCleary. *A users guide to spectral sequences*. Cambridge Univ. Press, 2000.

[Sch] S. Schröer. Baer's result: the infinite product of the integers has no basis. *Amer. Math. Monthly (to appear)*.

[Ser77] J.P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Springer Verlag, 1977.

Indice analitico