Secondo foglio di esercizi, corso di Istituzioni di Algebra, 15 novembre 2014

Risolvere almeno tre esercizi e consegnarli entro domenica 23 novembre in forma elettronica (un file .pdf direttamente preparato in latex oppure una scannerizzazione). Aggiungere nel file una pagina di frontespizio con nome e cognome e uno schema degli esercizi affrontati (per esempio: risolti gli esercizi 2,3,5, non svolto il 4, parzialmente svolti 1 e 6).

Cercate di fare gli esercizi da soli; comunque se nel risolvere un esercizio ricevete un aiuto sostanziale da un'altra persona, o da una ricerca in rete, dichiaratelo nel frontespizio (per esempio: nell'esercizio 3 ho avuto un suggerimento importante da Pinco Pallino).

In caso di difficoltà tecniche o se avete necessità di chiarimenti contattatemi per mail o a ricevimento o dopo le lezioni.

Esercizio 10 Sia A un anello locale noetheriano di dimensione d, con ideale massimale m. Sia q un ideale m-primario. Utilizzando i risultati di teoria della dimensione dimostrati nel corso, spiegare perchè la dimensione di $gr_q A$ è uguale a d.

Esercizio 11 Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Dimostrare che l'ideale $m = (2, 1+\sqrt{-3})$ è massimale. L'anello locale A_m è regolare?

Esercizio 12 Sia A la localizzazione di $\mathbb{Z}[x,y]$ nell'ideale massimale $(5, x-1, y+2)$ e sia $B = A/(x^2+y^2+4y-3x+6)$. Stabilire se B è un anello locale regolare.

Esercizio 13 Sia A un dominio noetheriano locale con ideale massimale m. Sia $B = A[X]_q$ dove q è un ideale primo di $A[X]$ tale che $m[X] \subseteq q$. Dimostrare che

$$dim\ B = dim\ A + 1 - tr_{deg} k'/k$$

dove $k = A/m$ e k' è il campo residuo di B (e $k \subseteq k'$ in modo ovvio).

Esercizio 14 Consideriamo l'ideale $I = (2, x)$ in $\mathbb{Z}[X]$. Trovare un omomorfismo di $\mathbb{Z}[X]$ moduli da I a $\mathbb{Q}[X]/\mathbb{Z}[X]$ che non si estende a tutto $\mathbb{Z}[X]$. [Dunque lo $\mathbb{Z}[X]$ modulo $\mathbb{Q}[X]/\mathbb{Z}[X]$ non è iniettivo.]

Esercizio 15 Sia $\mathcal{B}$ la categoria i cui oggetti sono gli insiemi finiti e i cui morfismi sono le bigezioni. Sia $\mathcal{S}$ la categoria degli insiemi. Consideriamo i seguenti due funtori, Sym e Ord, da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S}$. Per ogni oggetto X di $\mathcal{B}$, $Sym(X)$ è l'insieme delle bigezioni da X in sè, e $Ord(X)$ è l'insieme di tutti gli ordini totali che si possono mettere in X (=liste ordinate di lunghezza uguale alla cardinalità di X). Per ogni morfismo $f \in \mathcal{B}[X,Y]$, $Sym(f)$ è il morfismo che manda $\sigma \in Sym(X)$ in $f \circ \sigma \circ f^{-1} \in Sym(Y)$ e $Ord(f)$ è il morfismo che manda la lista $(x_1, x_2, ...)$ nella lista $(f(x_1), f(x_2), ...)$.

Verificare che Sym e Ord sono ben definiti. Sono naturalmente equivalenti?