Secondo foglio di esercizi, corso di Istituzioni di Algebra, 1 novembre 2013

Risolvere almeno quattro esercizi e consegnarli entro mercoledì 13 mattina, possibilmente in forma elettronica (un file .pdf direttamente preparato in latex oppure una scannerizzazione). Aggiungere nel file una pagina di frontespizio con nome e cognome e uno schema degli esercizi affrontati (per esempio: risolti gli esercizi 2,3,5, non svolto il 4, parzialmente svolti 1 e 6).

Cercate di fare gli esercizi da soli; comunque se nel risolvere un esercizio ricevete un aiuto sostanziale da un'altra persona, o da una ricerca in rete, dichiaratelo nel frontespizio (per esempio: nell'esercizio 3 ho avuto un suggerimento importante da Tizio).

In caso di difficoltà tecniche o se avete necessità di chiarimenti contattatemi per mail o a ricevimento o dopo le lezioni.

Esercizio 9 Sia R un anello e I un ideale. Consideriamo la filtrazione $\{I^n\}$ di R e definiamo la funzione $d : R \times R \to \mathbb{Q}^{\geq 0}$ definita così: $d(x,y) = \frac{1}{n+1}$ se $x - y \in I^n - I^{n+1}$, $d(x,y) = 0$ altrimenti. Dimostrare che d è simmetrica e soddisfa la disuguaglianza triangolare. Sotto quale ulteriore condizione d è una metrica?

Esercizio 10 Sia $\phi : \widehat{\mathbb{Z}}_{(10)} \to \widehat{\mathbb{Z}}_{(2)} \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_{(5)}$ l'isomorfismo standard. Trovare $w \in \widehat{\mathbb{Z}}_{(10)}$ tale che $\phi(w) = (0, 1)$.

Esercizio 11 Sia R un anello e I un ideale. È vero o falso che $\widehat{R}_I$ dominio implica R dominio?

Esercizio 12 Sia p un numero primo, e siano $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_p$ e $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^n}$. Si consideri l'omomorfismo di $\mathbb{Z}$ moduli $\alpha : A \to B$ che, componente per componente, è dato dalla immersione ovvia $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^n}$; a questo punto A può essere visto come sottomodulo di B. Dimostrare che il (p) completamento di A non è isomorfo al completamento di A indotto dal (p) completamento di B (quindi non vale Artin-Rees).

Esercizio 13 Sia R un anello noetheriano e I un ideale. Dimostrare il teorema di intersezione di Krull (esiste $r \in I$ tale che $(1-r)\bigcap I^n = 0$) nel modo indicato dai passi seguenti:
a) Osservare che basta dimostrare che per ogni $x \in \bigcap I^n$ vale $x \in xI$.
b) Sia $I = (a_1, a_2, ..., a_s)$ e sia $x \in \bigcap I^n$. Osservare che per ogni $n \geq 1$ esiste un polinomio omogeneo di grado n $P_n(X_1, X_2, ..., X_s)$ in $R[X_1, X_2, ..., X_s]$ tale che $x = P_n(a_1, a_2, ..., a_s)$.
c) Considerare gli ideali $J_n = (P_1, ..., P_n)$ in $R[X_1, X_2, ..., X_s]$. Osservare che, preso $N \in \mathbb{N}$ tale che la successione dei J_n si stabilizza da J_N in poi, si può scrivere:

$$P_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} Q_{N-i+1} P_i$$

per certi polinomi *omogenei* Q_i (di grado $i > 0$) in $R[X_1, X_2, ..., X_s]$.
d) Concludere che $x \in xI$.

Esercizio 14 Sia A un anello locale con ideale massimale m, completo rispetto alla topologia m-adica. Si consideri il gruppo moltiplicativo

$$U = \{1 + a \mid a \in m\}$$

e sia n un intero positivo che non è diviso dalla caratteristica di A/m. Dimostrare che la mappa $\phi : U \to U$ definita da $\phi(x) = x^n$ è un automorfismo del gruppo U.

Esercizio 15 Sia R un anello e $I \subset R$ un ideale. Siano M, N due R moduli con I filtrazioni

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq ....$$

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq ....$$

Sia $f : M \to N$ un omomorfismo che rispetta le filtrazioni, ossia $f(M_i) \subseteq N_i$ per ogni i e sia $gr(f)$ il corrispondente omomorfismo fra i moduli graduati $gr(M)$ e $gr(N)$. Supponiamo inoltre che $\cap M_r = \{0\}$.
a) È vero o falso che f iniettivo implica $gr(f)$ iniettivo?
b) È vero o falso che $gr(f)$ iniettivo implica f iniettivo?

Esercizio 16 Sia K un campo di caratteristica 0 e sia R il dominio locale $K[X,Y]_{(X,Y)}$. Sia $g = Y^2 - X^2(X+1)$ in R. Dimostrare che il quoziente $S = R/gR$ è un dominio locale. Sia m il suo ideale massimale. Dimostrare che $\widehat{S}_m$ non è un dominio.