Primo foglio di esercizi, corso di Istituzioni di Algebra, 22 ottobre 2014

Risolvere almeno quattro esercizi e consegnarli entro domenica 2 novembre in forma elettronica (un file .pdf direttamente preparato in latex oppure una scannerizzazione). Aggiungere nel file una pagina di frontespizio con nome e cognome e uno schema degli esercizi affrontati (per esempio: risolti gli esercizi 2,3,5, non svolto il 4, parzialmente svolti 1 e 6).

Cercate di fare gli esercizi da soli; comunque se nel risolvere un esercizio ricevete un aiuto sostanziale da un'altra persona, o da una ricerca in rete, dichiaratelo nel frontespizio (per esempio: nell'esercizio 3 ho avuto un suggerimento importante da ....).

In caso di difficoltà tecniche o se avete necessità di chiarimenti contattatemi per mail o a ricevimento o dopo le lezioni.

Esercizio 1(ripasso sul nullstellensatz) A lezione abbiamo dimostrato che, dati un campo K, una K-algebra finitamente generata B, e un embedding ϕ di K in un campo algebricamente chiuso L, esiste una omomorfismo

$$\widetilde{\phi} \,:\, B \to L$$

che estende ϕ. Come si dimostra, a partire da questo che, dato un ideale proprio I in $K[X_1, X_2, .., X_n]$, il suo luogo di zeri $V(I)$ in $\overline{K}^n$ non è vuoto?

Esercizio 2 Sia

$$A = \frac{\mathbb{C}[x, y, z]}{(y^2 - x^3 - x^2)}$$

e sia $B = \mathbb{C}[t, z]$. Dimostrare che:

a) A si può immergere come sottoanello in B tramite la mappa f definita da $f(\overline{x}) = t^2 - 1$, $f(\overline{y}) = t^3 - t$, $f(\overline{z}) = z$;

b) A e B hanno lo stesso campo dei quozienti;

c) $I = (t + 1, z - 1)$ è ideale primo in B;

d) $J = (t^2 - 1, t^3 - t, z - 1)$ e $H = (t^3 - t - z(t^2 - 1), t^2 - z^2)$ sono ideali primi di A e $H \subset J$;

e) $I \cap A= J$

f) non esiste un ideale D primo tale che $D \cap A = H$ e $D \subset I$.

Esercizio 3 Siano $A \subseteq B$ anelli, con B intero su A.
a) Dimostrare che se $x \in A$ è invertibile in B allora è invertibile anche in A.
b) Dimostrare che il radicale di Jacobson di A è la contrazione del radicale di Jacobson di B.

Esercizio 4

Sia A un sottoanello dell'anello B, e sia C la chiusura integrale di A in B. Siano f, g polinomi monici in $B[X]$ tali che $fg \in C[X]$.
a) Dimostrare che esiste un anello D tale che $B \subseteq D$ e entrambi i polinomi f e g si fattorizzano in $D[X]$ come prodotto di fattori di grado 1.
b) Dimostrare che f e g appartengono a $C[X]$.

Esercizio 5 Dimostrare che, dato un numero intero $d < -2$ libero da quadrati e congruo a 2 o a 3 modulo 4, l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è a ideali principali.

Esercizio 6 Si considerino due anelli $A \subset B$ e sia B un A-modulo finitamente generato. Dimostrare che, dato un ideale primo I di A, gli ideali primi Q di B tali che $Q \cap A = I$ sono un numero finito.

Esercizio 7 Si consideri l'anello di polinomi $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ graduato nella maniera standard. Si considerino gli ideali (graduati) $I_1 = (x^3 + y^3 + z^3)$ e $I_2 = (x^3 + y^3 + z^3, x^2 + y^2 + z^2)$. Si calcolino le serie di Poincaré

$$P(I_1, t), P(I_2, t), P(\mathbb{C}[X, Y, Z]/I_1, t), P(\mathbb{C}[X, Y, Z]/I_2, t)$$

dove la funzione 'lunghezza' λ è data da $dim_{\mathbb{C}}$.

Esercizio 8 Sia A un anello completo rispetto alla topologia indotta da un ideale I. Sia (a_n) una successione in A. Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esercizio 9 Sia A un dominio e I un ideale di A. Denotiamo con $gr_(A)$ l'anello graduato associato ad A rispetto alla filtrazione indotta da I e con $\widehat{A}_I$ il completamento di A rispetto alla topologia I-adica.
a) È vero o falso che A dominio implica $gr_(A)$ dominio? E il viceversa?
b) A lezione abbiamo visto che non è vero che A dominio implica $\widehat{A}_I$ dominio. E il viceversa?