Terzo foglio di esercizi, corso di Istituzioni di Algebra, 23 novembre 2013

Risolvere almeno quattro esercizi e consegnarli entro gioved 5 dicembre, possibilmente in forma elettronica (un file .pdf direttamente preparato in latex oppure una scannerizzazione). Aggiungere nel file una pagina di frontespizio con nome e cognome e uno schema degli esercizi affrontati (per esempio: risolti gli esercizi 2,3,5, non svolto il 4, parzialmente svolti 1 e 6).

Cercate di fare gli esercizi da soli; comunque se nel risolvere un esercizio ricevete un aiuto sostanziale da un'altra persona, o da una ricerca in rete, dichiaratelo nel frontespizio (per esempio: nell'esercizio 3 ho avuto un suggerimento importante da ....).

In caso di difficoltà tecniche o se avete necessità di chiarimenti contattatemi per mail o a ricevimento o dopo le lezioni.

Esercizio 17 Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}, \frac{1}{2}]$ è un dominio noetheriano di dimensione 1 integralmente chiuso (ossia un dominio di Dedekind).

Esercizio 18 a) Calcolare la serie di Poincaré dell'anello $R = \mathbb{C}[X_1, X_2, ..., X_n]$.
b) Dimostrare che, se I è un ideale graduato di R, vale

$$P(R/I, t) = P(R, t) - P(I, t)$$

c) Sia I un ideale di R generato dai monomi $m_0, m_1, m_2, ...m_k$, e supponiamo che le variabili che compaiono nel monomio m_0 non compaiano negli altri monomi. Sia $a = deg\ m_0$ e sia I' l'ideale generato da $m_1, m_2, ...m_k$. Dimostrare che

$$P(R/I, t) = P(R/I', t)(1 - t^a)$$

d) Calcolare $P(R/I, t)$ quando I è l'ideale generato da $X_1^{a_1}, X_2^{a_2}, ..., X_n^{a_n}$.

Esercizio 19 Si consideri l'ideale $p = (7, X, Y, Z)$ in $A = \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ e sia B il quoziente di A_p per l'ideale generato da $Z^2 - X^3 - X - Y^2$. Calcolare la dimensione di B e dire se è regolare.

Esercizio 20 Dato l'anello $A = \mathbb{Z}[X, Y]$ consideriamo l'ideale $I = (X^2 - XY + X, XY - Y^2 + Y)$. Calcolare la dimensione di $B = A/I$.

Esercizio 21 Dimostrare la seguente generalizzazione del "lemma di evitamento".

Sia A un anello, e siano $P_1, P_2, ..., P_k$, con $k \geq 2$, degli ideali di cui almeno $k - 2$ siano primi. Dato un ideale I, se $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k$ allora esiste un indice i per cui $I \subseteq P_i$.

[Suggerimento, da ritenersi parte del testo. Per induzione su k. Nel passo induttivo, supponiamo la proposizione vera fino a $k - 1$ e supponiamo di sapere che per ogni $i \geq 3$ P_i è primo. Sia $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k$. Se ci sono relazioni di inclusione fra i P_i ne possiamo eliminare qualcuno e applichiamo l'ipotesi induttiva. Supponiamo dunque che fra i P_i non ci siano inclusioni. Se $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{k-1}$ si applica l'ipotesi induttiva, altrimenti dobbiamo mostrare che $I \subseteq P_k$. Prendiamo un elemento $s_j \in P_j - P_k$ per ogni $j \leq k - 1$ e sia $s = s_1 s_2 \cdots s_{k-1}$. Preso un elemento $x \in I$, vogliamo mostrare che $x \in P_k$. Costruiamo l'elemento $z = sx + y$, dove y lo scegliamo in $I - P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{k-1}$...]

Esercizio 22 Sia R un anello noetheriano locale regolare di dimensione $d > 0$, con ideale massimale m. Dimostrare [,utilizzando l'esercizio precedente,] che si può scegliere $x \in m$ in maniera tale che

$R/(x)$ sia un anello locale regolare di dimensione $d-1$. *NOTA: il testo di questo esercizio non è molto indovinato, come alcuni di voi mi hanno segnalato. La richiesta di utilizzare l'esercizio precedente è troppo forzata. La ho dunque messa fra parentesi quadre, potete decidere di ignorarla. Risolvetelo come vi sembra meglio, anche in poche righe. Considererò l'esercizio buono qualunque sia il vostro svolgimento (corretto).*

Esercizio 23 Sia A un dominio noetheriano. Dimostrare che i seguenti due fatti sono equivalenti:
a) Esiste un $f \in A - \{0\}$ tale che A_f è un campo.
b) A ha un numero finito di ideali massimali e ha dimensione ≤ 1.

Esercizio 24 a) Siano I e J due ideali di un anello R. Dimostrare che c'è una successione esatta

$$0 \to (I \cap J)/IJ \to I \otimes_R (R/J) \to R/J \to (R/I) \otimes_R (R/J) \to 0$$

b) Dare un esempio di un anello R e un ideale I tali che la proiezione $R \to R/I$ non sia una mappa piatta.