Primo foglio di esercizi, corso di Istituzioni di Algebra, 11 ottobre 2013

Risolvere almeno quattro esercizi e consegnarli entro lunedi 21, possibilmente in forma elettronica (un file .pdf direttamente preparato in latex oppure una scannerizzazione). Aggiungere nel file una pagina di frontespizio con nome e cognome e uno schema degli esercizi affrontati (per esempio: risolti gli esercizi 2,3,5, non svolto il 4, parzialmente svolti 1 e 6).

Cercate di fare gli esercizi da soli; comunque se nel risolvere un esercizio ricevete un aiuto sostanziale da un'altra persona, o da una ricerca in rete, dichiaratelo nel frontespizio (per esempio: nell'esercizio 3 ho avuto un suggerimento importante da Pinco Pallino).

In caso di difficoltà tecniche o se avete necessità di chiarimenti contattatemi per mail o a ricevimento o dopo le lezioni.

Esercizio 1 Dato un campo K, si consideri la sottoalgebra $K[a, b]$ di $K[X]$, dove $a = X^2$ e $b = X^3$. Dimostrare che gli ideali primi non nulli di $K[a, b]$ hanno altezza 1.

Esercizio 2. Sia K un campo. Dimostrare che $R = K[X, Y]/(Y^3 - X^5)$ è un dominio e descrivere la sua chiusura integrale (nel suo campo delle frazioni).

Esercizio 3. Ricostruire la dimostrazione del teorema che descrive la chiusura integrale $\mathbb{Z}_{(d)}$ di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, a seconda dei casi $d \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$, sulla base della traccia data in classe.

Esercizio 4 Dimostrare che se d è un intero libero da quadrati tale che $d < -7$ e $d \equiv 1 \pmod 8$ allora la chiusura integrale $\mathbb{Z}_{(d)}$ di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ non è un anello a ideali principali.

Esercizio 5. Calcolare la dimensione (di Krull) dell'anello $A = K[X, Y, Z]/I$ dove K è un campo e $I = (XY, XZ)$.

Esercizio 6 Sia R un anello di dimensione di Krull finita d.
a) Dimostrare che, dato un ideale primo p in R, non può accadere che esistano tre ideali primi $q_1 \subsetneq q_2 \subsetneq q_3$ in $R[X]$ la cui contrazione sia uguale a p.
b) Dimostrare che la dimensione di Krull di $R[X]$ è $\leq 2d + 1$.

Esercizio 7. Sia A una k-algebra tale che $1 \leq dim_k A < \infty$ ($dim_k A$ è la dimensione di A come spazio vettoriale su k).
a) A è artiniana?
b) Supponiamo che A sia locale, con ideale massimale m. Dimostrare che $m^{dim_k A} = 0$ e dare un esempio in cui $dim_k A \geq 2$ e $m^{dim_k A - 1} \neq 0$.

Esercizio 8. Si consideri un sottogruppo finitamente generato G di $GL(n, \mathbb{C})$. Dimostrare che G è residualmente finito, ossia per ogni $g \neq 1$, $g \in G$, esiste un omomorfismo ϕ_g da G in un gruppo finito tale che $\phi_g(g) \neq 1$. Questo equivale a dire che esiste un sottogruppo normale di indice finito di G che non contiene g. [Ripensare alla dimostrazione del Lemma di Selberg]