1. Un metodo per calcolare l'intersezione di due sottospazi vettoriali

Fin qui abbiamo visto essenzialmente due modi di presentare un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V: come span di certi vettori ($< v_1, ..., v_r >$) oppure come nucleo di una applicazione lineare (ovvero come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo).

Consideriamo due sottospazi, U e W, di V. Se entrambi sono presentati come insieme delle soluzioni di un sistema è facile calcolare $U \cap W$: basta calcolare le soluzioni del sistema 'doppio', ottenuto considerando tutte le equazioni dei due sistemi.

Per esempio se U e W in $\mathbb{R}^4$ sono dati rispettivamente dalle soluzioni dei sistemi S_U:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4w & = 0 \\ 2x + y + z + w & = 0 \end{cases}$$

e S_W:

$$\begin{cases} x + 2y + z + w & = 0 \\ x + z + w & = 0 \end{cases}$$

allora $U \cap W$ è dato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4w & = 0 \\ 2x + y + z + w & = 0 \\ x + 2y + z + w & = 0 \\ x + z + w & = 0 \end{cases}$$

Esercizio 0.1. Calcolare $U \cap W$ nell'esempio proposto.

Ma come possiamo calcolare $U \cap W$ se i due sottospazi sono presentati come span di certi vettori? Consideriamo per esempio U e W in $\mathbb{R}^5$ definiti così:

$$U = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} >$$

e

$$W = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Un metodo per calcolare $U \cap W$ è quello di esprimere U e W come soluzioni di un sistema lineare. Mostriamo come si può fare, cominciando da U. Per prima cosa scriviamo il sistema omogeneo le cui righe sono date dai vettori di U 'scritti in orizzontale':

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 1x_5 & = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono, come sappiamo, uno spazio vettoriale di dimensione 3 (visto che U ha dimensione 2, ovvero che le due righe del sistema risultano linearmente indipendenti) che chiameremo $U^\perp$, il sottospazio *ortogonale* a U. [1]

Nel nostro caso, risolvendo il sistema, si trova che

$$U^\perp =< \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Ora chiediamoci chi è $(U^\perp)^\perp$, ovvero, quale è il sottospazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ 13x_1 - 4x_3 + 1x_4 & = 0 \\ -17x_1 + 5x_3 + 1x_5 & = 0 \end{cases}$$

Cosa sappiamo di questo spazio? Visto che le tre righe sono linearmente indipendenti (sono costituite da tre vettori che sono una base di $U^\perp$), sappiamo che la dimensione di $(U^\perp)^\perp$ è uguale a 2. Inoltre conosciamo due vettori che sicuramente appartengono a $(U^\perp)^\perp$: si tratta di

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

che sono la base di U. Infatti tali vettori sono soluzioni del sistema (verificare: i vettori della base di $U^\perp$ per costruzione sono tali che fare il prodotto righe per

[1] La parola 'ortogonale' richiama ed estende il concetto geometrico di 'perpendicolarità', come ricordiamo qui di seguito con un breve accenno. Ricordiamo che in $\mathbb{R}^2$, dato il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ che risolvono l'equazione

$$2x_1 + x_2 = 0$$

sono i vettori che giacciono sulla retta $< \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} >$, che è perpendicolare ovvero *ortogonale* alla retta $< \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} >$.

In generale, in $\mathbb{R}^n$, dato un vettore

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$

i vettori che risolvono l'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0$$

costituiscono uno spazio di dimensione $n-1$ (un *iperpiano*) e sono appunto i vettori perpendicolari a v. Verificate, con un esempio in $\mathbb{R}^3$, che stiamo proprio estendendo a $\mathbb{R}^n$ il concetto usuale di perpendicolarità.

colonne di un vettore della base di U e di uno della base di $U^{\perp}$ dà come risultato 0); inoltre, visto che sono due (il numero giusto: $(U^{\perp})^{\perp}$ ha dimensione 2), sono una base di $(U^{\perp})^{\perp}$.

Abbiamo così 'scoperto' che $(U^{\perp})^{\perp} = U$ [2]. Dunque il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 13x_1 - 4x_3 + 1x_4 &= 0 \\ -17x_1 + 5x_3 + 1x_5 &= 0 \end{cases}$$

ha come spazio delle soluzioni proprio U.

Per finire il calcolo di $U \cap W$ possiamo allo stesso modo calcolare una base di $W^{\perp}$ e, scrivendo in orizzontale i vettori di questa base, ottenere un sistema le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di W:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_5 &= 0 \\ -10x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{cases}$$

A questo punto possiamo ottenere $U \cap W$ risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 13x_1 - 4x_3 + 1x_4 &= 0 \\ -17x_1 + 5x_3 + 1x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 &= 0 \\ -10x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{cases}$$

Esercizio 0.2. Verificare nel dettaglio tutti i calcoli di questo paragrafo e concludere l'esercizio, indicando una base di $U \cap V$. La dimensione risulta uguale a quella prevista dalla formula di Grassmann che abbiamo anticipato in classe?

[2] Dal punto di vista geometrico, non ci stupisce che 'l'ortogonale dell'ortogonale di U' sia U stesso. Anche in dimensione bassa, per esempio in $\mathbb{R}^2$, sappiamo che, data una retta r passante per l'origine, la retta perpendicolare alla retta perpendicolare a r e passante per l'origine è r stessa.