Corso di Algebra, Informatica

Bozza per corsi A,B,C

5 aprile 2006

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Valutazione ....

Esercizio 1

....
....
.... Voto ....

Esercizio 2

....
....
.... Voto ....

Esercizio 3

....
....
.... Voto ....

Esercizio 4

....
....
.... Voto ....

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 1
Consideriamo lo spazio vettoriale

$$\mathbb{R}^{\leq 2} = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 2
a) Dimostrare che l'insieme

$$A = \{p_1(x) = x + 1,\ p_2(x) = x^2 + x + 1,\ p_3(x) = x^2 + 2x,\ p_4(x) = 3\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^{\leq 2}$.
b) Dimostrare che A non è una base di $\mathbb{R}^{\leq 2}$.
c) Estrarre da A una base per $\mathbb{R}^{\leq 2}$.
d) Trovare le coordinate del polinomio $2x^2 - 2x + 5$ rispetto alla base di A individuata al punto precedente.

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 2

a) Fattorizzare il polinomio $x^5 - x^4 + x^3 - 9x - 6$ come prodotto di irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$ $\mathbb{Z}_7[x]$.

b) Costruire, motivando la risposta, un campo con 5^3 elementi.

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 3
Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da:

$$L(x, y, z) = (x + 2y + z, 5x - 3y + z, 2x - 9y - 2z)$$

a) Dimostrare che L è un'applicazione lineare.
b) Trovare una base di $Imm(L)$ e $Ker(L)$.
c) Scrivere un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che la dimensione di $Imm(T)$ è uguale a 1 e $Imm(T) \cap Imm(L) = \{O\}$.

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 4

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + 2kz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= k \\ 2x + 3y - z &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette soluzione in $\mathbb{R}$, e trovare, in corrispondenza di tali valori, tutte le soluzioni del sistema.
b) Per i valori di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni, trovare una o più equazioni da aggiungere al sistema in modo tale che il nuovo sistema ammetta una e una sola soluzione.

Soluzione