Corso di Algebra, Informatica

Bozza per corsi A,B,C

5 aprile 2006

Cognome .... **Nome ....**

Corso ....

Valutazione ....

Esercizio 1

....
....
.... Voto ....

Esercizio 2

....
....
.... Voto ....

Esercizio 3

....
....
.... Voto ....

Esercizio 4

....
....
.... Voto ....

Cognome .... **Nome ....**

Corso ....

Esercizio 1 (10 punti)
Consideriamo i due seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Dimostrare che B è una base di $\mathbb{R}^3$ e che i vettori di A sono linearmente indipendenti. Completare poi A ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

2. Considerata l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L(x, y, z) = (x + y, z, z)$ trovare una base di Ker L e $\mathrm{Im}(L)$ e scrivere la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ associata alla base $\mathcal{C}$ in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.

Soluzione

Cognome .... **Nome ....**

Corso ....

Esercizio 2 (10 punti) Sia L un'endomorfismo lineare dello spazio vettoriale V, sia A la matrice corrispondente all'endomorfismo A in una base fissata di A. E sia $det(A) = 0$.
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false: (Le risposte senza giustificazione non avranno nessun punteggio)

1. L'endomorfismo L non è surgettivo.
2. Ker$L = \{0\}$.
3. Almeno un pivot della matrice A in una sua riduzione a scala è nullo.
4. La matrice A ha almeno uno 0 sulla diagonale principale.
5. Esiste una base $\mathcal{B}$ di V per cui la matrice associata ad L rispetto a $\mathcal{B}$ ha la prima colonna tutta di zeri.

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 3 (10 punti) Siano

$$V_a = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$W = Span \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

due sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

1. Al variare di a in $\mathbb{R}$, trovare la dimensione di $V_a + W$ e di $V_a \cap W$;
2. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartiene al sottospazio $V_a \cap W$.

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 4 (10 punti) **Corsi A e C**

1. Dire se esistono, e in caso affermativo trovare quali, valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Determinare gli autovettori di A_{-1}.

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 4 (10 punti) **Corso B**
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Verificare che $A^2 = A$;
2. dimostrare che $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im} A$;
3. dimostrare che se B è una matrice $n \times n$ tale che $B^2 = B$, allora o $\det B = 0$ oppure $\det B = 1$ e B è la matrice identità;
4. dimostrare che se B è una matrice $n \times n$ tale che $B^2 = B$, allora $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, B \oplus \mathrm{Im} B$ [suggerimento: provare a scrivere un vettore v qualunque nella forma $v = Bv + (v - Bv)$].