Corso di Algebra, Informatica

Compito - Appello di Giugno

12 giugno 2006

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Valutazione ....

Esercizio 1

....
....
.... Voto ....

Esercizio 2

....
....
.... Voto ....

Esercizio 3

....
....
.... Voto ....

Esercizio 4

....
....
.... Voto ....

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 1

1. Fattorizzare il polinomio $x^4-4x^3+x^2+8x-6$ come prodotto di irriducibili in $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_7[x]$, $\mathbb{Z}_{11}[x]$.
2. Costruito un campo $\mathbb{K}$ con 49 elementi come quoziente di $\mathbb{Z}_7[x]$ per un polinomio $f(x)$ irriducibile di grado opportuno, trovare in $\mathbb{K}$ l'opposto e l'inverso dell'elemento $[3x-2]$.

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 2 Consideriamo i seguenti sottoinsiemi V e W dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ (spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3):

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] |\ p(-1) = 0\}$$

e

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | p'(1) = 0\}$$

(Con $p'(x)$ indichiamo la derivata del polinomio $p(x)$)

1. Dimostrare che V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Determinare una base di V, W, $W + V$ e $W \cap V$.

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 3 Sia A una matrice 2×2 a valori in $\mathbb{R}$.

1. Dimostrare che esiste una matrice B 2×2 a valori in $\mathbb{R}$ diversa dalla matrice 0 tale che $A \times B = 0$ se e solo se il determinante di A è uguale a 0.
2. Il risultato precedente è vero anche per le matrici $n \times n$?

Soluzione

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 4 Consideriamo l'endomorfismo lineare L_a di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro reale a e definito da:

$$L_a(x, y, z) = (ax + y + z, x + ay + z, -x + y + az)$$

1. Trovare per quali valori di a l'applicazione L_a non è surgettiva. Fissato uno di tali valori $\bar{a}$ determinare una base di $Ker(L_{\bar{a}})$ e $Imm(L_{\bar{a}})$.
2. Discutere la diagonalizzabilità di L_a al variare del parametro reale a
3. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per L_0 (ovvero prendendo $a = 0$).

Soluzione