Corso Algebra C. Anno 2005-2006

Argomenti trattati a lezione.

- Prima lezione (14-2-2006).
  Esempi elementari di anelli e campi. L'anello $\mathbb{Z}_m$ delle classi di resto modulo $m \in \mathbb{Z}^+$. Il campo $\mathbb{Z}_p$ (quando p è un numero primo).
  Cosa è un polinomio. L'anello dei polinomi $K[x]$ (dove K è un campo) e le sue somiglianze con $\mathbb{Z}$: la divisione euclidea in $K[x]$, l'algoritmo di Euclide, il concetto di massimo comune divisore di due polinomi non entrambi nulli.
  Radici di un polinomio. Dimostrazione del Teorema della radice e di alcuni suoi corollari (fra cui "un polinomio di grado $n \geq 1$ in $K[x]$, dove K è un campo, ha al più n radici in K").

- Seconda lezione (21-2-2006).
  Lemma di Bezout per polinomi (dimostrazione sulle dispense integrative).
  Definizione di polinomio irriducibile. Dimostrazione del fatto che ogni polinomio irriducibile in $K[x]$ (con K campo) è primo. Enunciato (senza dimostrazione) del teorema di fattorizzazione unica in prodotto di irriducibili. Relazione fra polinomi irriducibili e radici.
  Introduzione al campo dei numeri complessi. Enunciato del Teorema fondamentale dell'algebra (dimostrazione facoltativa, per i coraggiosi). I polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x]$. Chi sono i polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ (con dimostrazione).

- Terza lezione (28-2-2006).
  Alcune osservazioni sui polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$: il lemma di Gauss (solo enunciato), il criterio per trovare una radice di un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$, il criterio di Eisenstein (solo enunciato).
  Introduzione alle congruenze modulo polinomi e ad un metodo per costruire nuovi campi e nuovi anelli (vedi anche appunti integrativi).
  Gli spazi vettoriali, primi esempi. Sottospazi vettoriali.

- Quarta lezione (7-3-2006).
  Definizione di combinazione lineare di vettori e di "insieme di generatori" di uno spazio vettoriale. Definizione di "insieme di vettori linearmente indipendenti". Definizione di base di uno spazio vettoriale. Esempi. Esempio di uno spazio vettoriale di dimensione infinita ($\mathbb{R}[x]$). Enunciato (per ora senza dimostrazione) del teorema che dice che quando uno spazio vettoriale ha una base finita, tutte le basi hanno la stessa cardinalità. Tale cardinalità sarà per definizione la dimensione dello spazio vettoriale.
  Teorema: ogni vettore di uno spazio vettoriale si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una base (dimostrazione con un esempio: quella generale la trovate nelle dispense).

Definizione di applicazione lineare fra spazi vettoriali. Esempi: applicazioni lineari da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ e una applicazione lineare da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^3$. Applicazioni lineari e basi: rappresentazione matriciale di una applicazione lineare. Esempio: la matrice associata ad una applicazione lineare cambia a seconda della base scelta.
Definizione della somma e del prodotto fra matrici.

- Quinta lezione (14-3-2006).
L'anello $End\ V$ delle applicazioni lineari da uno spazio vettoriale V (sul campo K) in sé e l'anello $Mat_{n\times n}(K)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in K: verifica delle proprietà di anello ed esempio che mostra la non commutatività se $n \geq 2$. Esempi di elementi non invertibili.
Definizione di nucleo di una applicazione lineare. Teorema: il nucleo di una applicazione lineare è un sottospazio vettoriale. Teorema: una applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è $\{O\}$. Si ribadisce che il sottospazio generato dalle colonne di una matrice $[L]$, associata, dopo aver fissato le basi, ad una applicazione lineare $L : V \to W$, coincide con il sottospazio $L(V)$, ossia l'immagine di L.
Operazioni elementari sulle colonne di una matrice: descrizione ed esempi. Matrici in forma a scalini (per colonne).
Si osserva che ogni matrice può essere trasformata in forma a scalini (per colonne) tramite le mosse elementari.

- Sesta lezione (21-3-2006).
Osservazione: le operazioni elementari sulle colonne sono reversibili, e si possono ottenere moltiplicando la matrice a destra per una certa matrice invertibile. Inoltre, il sottospazio generato dalle colonne di una matrice trasformata in forma a scalini e il sottospazio generato dalle colonne della matrice iniziale coincidono.
Teorema (con dimostrazione): se V è uno spazio vettoriale con una base di cardinalità n, tutte le altre basi dello spazio hanno cadinalità n. Questo permette di dare ufficialmente la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale come "cardinalità di una qualunque sua base". Operazioni elementari sulle righe di una matrice, forma a scalini per riga. Osservazione: le operazioni sulle righe di una matrice si possono ottenere moltiplicando la matrice a sinistra per una certa matrice invertibile.
Teorema(con dimostrazione): se $L : V \to W$ è una applicazione lineare e $B : W \to W$ è una applicazione lineare invertibile allora $dim\, Imm\ B \circ L = dim\, Imm\ L$.
Definizione di rango di una applicazione lineare. Il rango di una pplicazione lineare L si può calcolare a partire da una matrice $[L]$ associata all'applicazione lineare ed è invariante sia per le mosse di riga che per le mosse di colonna.
Teorema (con una traccia di dimostrazione, vedere dispense integrative): se $L : V \to W$ è una applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita allora $dim\, Imm\ L + dim\, Ker\ L = dim\, V$.

- Settima lezione (28-3-2006).
Teorema (con dimostrazione): dato in uno spazio vettoriale V un insieme di vettori lin-

earmente indipendenti, tale insieme si può estendere ad una base di V. Dimostrazione alternativa del teorema - vedi lezione precedente- $dim\, Imm\ L + dim\, Ker\ L = dim\, V$. Definizione di somma di due sottospazi di uno spazio vettoriale.
La formula di Grassmann per i sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita: $dim\ A + dim\ B = dim\ A \cap B + dim\ (A + B)$ (con dimostrazione). Definizione di somma diretta di due sottospazi.
Definzione di determinante di una matrice quadrata con lo sviluppo di Laplace.
Regole di calcolo per il determinante. Il teorema di Binet (senza dimostrazione). Determinante attraverso la riduzione a scala. Teorema (senza dimostrazione): sia $L : V \to W$ una applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita e sia r il massimo numero naturale tale che in una matrice associata $[L]$ esiste un minore $r \times r$ con determinante diverso da zero; allora il rango di L è uguale a r.

- Ottava lezione (27-4-2006).
  Correzione del primo compitino. Definizione di autovalore e autovettore di un endomorfismo lineare. Il polinomio caratteristico.

- Nona lezione (4-5-2006).
  Teorema: le radici del polinomio caratteristico associato ad un endomorfismo T sono tutti e soli gli autovalori di T (con dimostrazione). Definizione di autospazio V_λ relativo ad un autovalore λ. Teorema (con dimostrazione): dato un endomorfismo lineare $T : V \to V$, siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ degli autovalori di T distinti fra loro. Consideriamo ora degli autovettori $v_1 \in V_{\lambda_1}, v_2 \in V_{\lambda_2}, \ldots, v_k \in V_{\lambda_k}$. Allora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

  Forma forte del teorema precedente, che dice che gli autospazi $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta. *A riguardo della dimostrazione di questa forma forte e comunque di tutta questa lezione si veda il paragrafo "Autovalori e autovettori di un endomorfismo lineare" nella sezione "Appunti integrativi".*

- Decima lezione (9-5-2006).
  Molteplicità algebrica e geometrica di un endomorfismo. Criterio di diagonalizzabilità. Esempi. Teorema di Cayley-Hamilton (solo enunciato).

- Undicesima lezione (23-5-2006).
  Teorema: consideriamo un endomorfismo lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la cui matrice associata $[T]$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica. Allora T è diagonalizzabile. (SOLO ENUNCIATO, la dimostrazione proposta in classe è sbagliata, vedi anche appunti integrativi). Cenni su forme bilineari simmetriche e prodotti scalari.