(3) $\underline{F}(x,y) = (x^3 y, 2xy)$

(a) $\text{rot}\, \underline{F} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 y)\right) =$

$= (0, 0, 2y - x^3) \neq (0,0,0)$

$\underline{F}$ non è, pertanto, irrotazionale e dunque non è conservativo.

(b) Il teorema di Gauss-Green applicato al dominio decomponibile A afferma che

$$\iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 y)\right) dx\,dy =$$

$$= \oint_{\partial A^+} x^3 y\, dx + 2xy\, dy.$$

Poiché A è simmetrico rispetto all'asse y, si ha

$$\iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 y) \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_A (2y - x^3)\, dx\,dy = 2 \iint_A y\, dx\,dy.$$

D'altra parte

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ con

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq -1,\ -x \leq y \leq \sqrt{8-x^2}\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq \sqrt{8-x^2}\}$$

$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq \sqrt{8-x^2}\}$$

da cui segue, sempre per simmetria

$$2 \iint_A y\, dx\,dy = \left(4 \iint_{A_1} + 2 \iint_{A_2} \right) y\, dx\,dy$$

Infine

$$4 \iint_{A_1} y\, dx\,dy = 4 \int_{-2}^{-1} dx \int_{-x}^{\sqrt{8-x^2}} y\, dy =$$

$$= 4 \int_{-2}^{-1} (4 - x^2)\, dx = 16 - \frac{4}{3}\left[x^3 \right]_{-2}^{-1} = 20/3$$

e

$$2 \iint_{A_2} y\, dx\,dy = 2 \int_{-1}^{1} dx \int_{1}^{\sqrt{8-x^2}} y\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (7 - x^2)\, dx = 14 - \frac{1}{3}\left[x^3 \right]_{-1}^{1} = 40/3$$

e dunque

$$2\iint_A y\,dx\,dy = 20.$$

$$\underline{F}(x,y) = (y^2, x^4)$$

(a') $\operatorname{rot} \underline{F} = (0, 0, 2y - 4x^3) \neq (0,0,0)$

$\underline{F}$ non è irrotazionale e quindi non è conservativo.

(b') Gauss-Green $\Rightarrow$

$$\iint_A (2y - 4x^3)\,dx\,dy = \oint_{\partial A^+} y^2\,dx + x^4\,dy$$

Ma, per la simmetria di A rispetto all'asse delle y,

$$\iint_A (2y - 4x^3)\,dx\,dy = 2\iint_A y\,dx\,dy = 20.$$