# Richiami di calcolo combinatorio

**(A.1)** Dati due insiemi finiti $A$ e $B$, con $\mathrm{Card}(A) = m$, $\mathrm{Card}(B) = n$, si ha

$$\mathrm{Card}(A \times B) = m \cdot n.$$

Possiamo anche dire che il numero delle scelte possibili di un elemento di $A$ e di un elemento di $B$ è $m \cdot n$.

**(A.2)** Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ insiemi finiti, con $\mathrm{Card}(A_i) = m_i$. Si deduce facilmente, per induzione, da (A.1), che

$$\mathrm{Card}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n.$$

**(A.3)** È importante il caso particolare di (A.2) in cui sia

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A.$$

Posto $m = \mathrm{Card}(A)$, si trova

$$\mathrm{Card}(A^n) = \big(\mathrm{Card}(A)\big)^n = m^n.$$

**(A.4)** Siano dati due insiemi $X$ e $A$, con $\mathrm{Card}(X) = n$, $\mathrm{Card}(A) = m$. Allora il numero delle applicazioni di $X$ in $A$ è dato da $m^n$. Infatti l'insieme delle applicazioni di $X$ in $A$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con il prodotto cartesiano di $n$ copie dell'insieme $A$, e quindi si applica (A.3).

**(A.5)** Ogni elemento del prodotto cartesiano $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ ($n$ volte) può essere visto come un $n$–upla di elementi di $A$, dei quali, eventualmente, qualcuno sia ripetuto.

Ad esempio, se $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $n = 3$, gli elementi di $A^3$ sono:

$$(a_1, a_1, a_1),\ (a_1, a_1, a_2),\ (a_1, a_1, a_3),\ (a_1, a_1, a_4),\ (a_1, a_2, a_1), \ldots$$

Le $n$–uple di elementi di $A$ si chiamano anche *sequenze con ripetizione* (di elementi di $A$) di lunghezza $n$. Il numeri di tali sequenze è dunque, come abbiamo visto,

$$\big(\mathrm{Card}(A)\big)^n.$$

**(A.6)** Dato un insieme $A$ formato da $m$ oggetti, ciamo interessati anche al numero di *sequenze senza ripetizione* (di elementi di $A$) di lunghezza $n$ (con $0 <\leq m$). Esse vengono anche chiamate *disposizioni* di $m$ oggetti a $n$ a $n$. È facile vedere che questo numero è dato da

$$(m)_n = m(m-1)\cdots(m-n+1).$$

**(A.7)** Siano $X$ e $A$ due insiemi con in (A.4), e supponiamo $0 < n \leq m$. Il numero delle applicazioni iniettive di $X$ in $A$ è dato da $(m)_n$.

**(A.8)** È importante il caso particolare di (A.6) in cui sia $n = m$; il numero $(m)_m$ è il numero di modi diversi in cui si possono disporre gli $m$ elementi di $A$, o, come si dice, il numero delle *permutazioni* degli $m$ oggetti che formano $A$. Il numero $(m)_m$ si indica più frequentemente con $m!$ (da leggere: "$m$ fattoriale"), e vale

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m.$$

**(A.9)** Sia $A$ come in (A.6). Due sequenze senza ripetizione di elementi di $A$ possono differire per gli oggetti che la compongono, oppure anche soltanto per l'ordine in cui questi oggetti vengono presi; in molte situazioni, tuttavia, basterà contare il numero delle sequenze che differiscono per la natura degli elementi (identificando cioè quelle formate dagli stessi oggetti, presi in ordine diverso); ci interessa dunque di trovare il numero di gruppi, costituiti da $n$ elementi, che si possono formare a partire da un insieme di cardinalità $m$. Questi gruppi si chiamano *combinazioni* di $m$ oggetti a $n$ a $n$. Non è difficile vedere che il numero che cerchiamo vale

$$\frac{(m)_n}{n!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.$$

Il numero $\binom{m}{n}$ si chiama *coefficiente binomiale* $m, n$. Osserviamo che si ha

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}.$$

**(A.10)** È necessario dare un senso anche al simbolo $0!$ (il caso $m = n = 0$ non rientra nella situazione considerata in (A.8)). Possiamo ragionare così: se in (A.9) prendiamo $n = m$, il coefficiente binomiale risultate dovrà essere il numero dei gruppi costituiti da $m$ oggetti, formati a partire da un insieme di cardinalità $m$. È chiaro che di questi gruppi ne potremo formare soltanto uno (l'insieme dato) e quindi dovremo avere

$$\binom{m}{m} = 1.$$

D'altra parte, sviluppando formalmente la formula che definisce il coefficiente binomiale, si trova

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!0!} = \frac{1}{0!}.$$

Dovremo pertanto posse $0! = 1$.

**(A.11)** Se $1 \leq n \leq m-1$ si ha

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}.$$

La dimostrazione di questa nota formula può essere fatta algebricamente sviluppando i coefficienti binomiali che vi compaiono, oppure, più semplicemente, ricordando il significato combinatorio di tali coefficienti: basta osservare che, a partire da un insieme di cardinalità $m$, si possono formare tutti i gruppi di $n$ elementi togliendo uno degli oggetti, a prendendo poi dagli $m-1$ restanti ogni gruppo costituito da $n$ elementi ed ogni gruppo costituito da $n-1$ elementi (a questi ultimi sarà poi riaggiunto l'oggetto tolto all'inizio).

**(A.12) Il binomio di Newton** Siano $a, b$ due numeri reali, $n$ un intero non negativo. Si ha allora

$$(a+b)^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

La dimostrazione di questa famosa formula può essere fatta per induzione su $n$, sfruttando il risultato di (A.12) oppure, più semplicemente, osservando che, moltiplicando il numero $(a+b)$ per se stesso $n$ volte, il termine $a^k b^{n-k}$ compare tante volte quanti sono i modi di formare gruppi di $k$ a partire da un insieme di $n$ oggetti ($a^k b^{n-k}$ è il prodotto di $n$ fattori: $k$ volte il fattore $a$, $n-k$ volte il fattore $b$).

**(A.13)** Un caso particolare della formula precedente: prendendo $a = b = 1$, si trova

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Ricordando il significato combinatorio dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$, la formula scritta sopra si può interpretare dicendo che il numero di sottoinsiemi che si possono formare a partire da un insieme di $n$ elementi è pari a $2^n$.