Il problema del ballottaggio

In un ballottaggio tra due candidati, A e B, il candidato A ottiene a voti, il candidato B ne ottiene b, con $a > b$. Si vuole calcolare la probabilità che, nel corso dello scrutinio (effettuato scheda per scheda), il candidato vincente si mantenga sempre in vantaggio sull'avversario.

Qualche avvertenza

1. Svilupperemo i vari passi facendo spesso riferimento al caso numerico $a = 7$, $b = 4$, ma, come vedrai, il procedimento è del tutto generale.

2. Durante lo svolgimento ti si chiederà di risolvere qualche esercizio, di cui, comunque, ti diamo la soluzione. Leggila però solo dopo avere riflettuto e provato a dare la tua risposta.

Soluzione

Per come si svolge lo scrutinio, siamo autorizzati a supporre che ogni suo esito abbia la stessa probabilità di presentarsi degli altri. Questo significa che possiamo ipotizzare come modello probabilistico uno spazio uniforme. Spieghiamo nei dettagli la costruzione di questo spazio.
Poniamo

$$\Omega = \{\text{possibili esiti dello scrutinio}\};$$

supponiamo di saper contare il numero di elementi di Ω (indicheremo questo numero con il simbolo $\mathrm{Card}(\Omega)$, da leggere "cardinalità di Ω "; esso è comunemente chiamato "numero dei casi possibili ", ma è preferibile evitare questo linguaggio troppo generico).

Supponiamo ora aver individuato, nell'insieme Ω, il sottoinsieme E dei possibili esiti dello scrutinio che rispondono alla domanda che ci siamo posti (cioè quelli nei quali il candidato A si mantiene sempre in vantaggio su B); supponiamo infine di saper contare anche il numero di elementi di E (che indicheremo questo numero con il simbolo $\mathrm{Card}(E)$, da leggere "cardinalità

di E"; esso è comunemente chiamato "numero dei casi favorevoli ", ma al solito noi eviteremo questa terminologia).
Allora la probabilità cercata non è che la probabilità di E, ovvero la quantità

$$P(E) \doteq \frac{\mathrm{Card}(E)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Dunque dobbiamo fare le cose seguenti:

a) costruire Ω (detto meglio, costruire una rappresentazione dell'insieme dei possibili esiti dello scrutinio che sia comoda per i calcoli);
b) calcolare $\mathrm{Card}(\Omega)$;
c) fra gli elementi di Ω, identificare quelli che appartengono a E;
d) calcolare $\mathrm{Card}(E)$.

a) Supponiamo che lo scrutinio abbia dato l'esito mostrato nella tabella sottostante

(1)

numero voto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
candidato votato	A	A	B	B	B	A	B	A	A	A	A

(significa: la 1ª scheda aperta riporta un voto per A, la 2ª un voto per A, la 3ª un voto per B, ecc...). È chiaro allora che la sequenza

$$(AABBBABAAAA) \tag{2}$$

rappresenta l'esito del nostro scrutinio (non è altro che la seconda riga della tabella (1)).
Si tratta di una sequenza composta da 11 caselle (o, come si dice, di lunghezza 11), 7 delle quali occupate dal simbolo A, e le restanti 4 dal simbolo B.

Esercizio 1. Usando le sequenze del tipo di (2), è possibile rappresentare l'insieme di tutti i possibili esiti dello scrutinio. In che modo?

Risposta. Basta scrivere <u>tutte</u> le sequenze di lunghezza 11 composte da 7 simboli A e 4 simboli B (nel caso generale, si tratta delle sequenze di lunghezza $a + b$ composte da a simboli A e b simboli B).

b) **Esercizio 2.** Quanti sono i possibili esiti dello scrutinio nel caso dell'esempio numerico ? E in generale?

Risposta. Rispondiamo per il caso numerico. Vedremo che per il caso generale il procedimento è esattamente identico. Per quanto abbiamo visto nell'esercizio 1, è chiaro che si devono contare le sequenze di lunghezza 11 composte da 7 simboli A e 4 simboli B; ora, per costruirle, basta prendere 11 caselle vuote, e sceglierne 7 in cui inserire il simbolo A; nelle 4 caselle non scelte inseriremo invece il simbolo B. Osserva i vari passi sulle figure seguenti

1)

Si hanno a disposizione 11 caselle

2)

■	■				■		■	■	■	■

Si scelgono 7 caselle (annerite)

3)

A	A				A		A	A	A	A

Nelle caselle scelte viene inserito il simbolo A

4)

A	A	B	B	B	A	B	A	A	A	A

Nelle restanti caselle viene inserito il simbolo B

Abbiamo così ricostruito la sequenza (2), ma nello stesso modo si può procedere per ciascuna sequenza, e cioè per ciascuno scrutinio; dunque il nostro problema (quello di contare i vari esiti dello scrutinio) si traduce nel problema di calcolare in quanti modi diversi è possibile scegliere un sottogruppo di 7 oggetti prendendoli da un gruppo di 11, ovvero, quante sono le *combinazioni di 11 oggetti a 7 a 7.* Come è noto, esse sono in numero di

$$C_7^{(11)} = \binom{11}{7} = \frac{11!}{7!4!}.$$

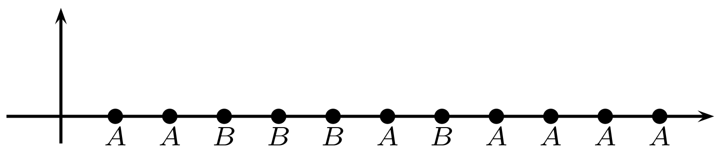
È chiaro che lo stesso ragionamento ci porta a concludere che, nel caso generale, il numero di possibili esiti dello scrutinio (cioè la cardinalità di Ω) è

$$C_a^{(a+b)} = \binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!b!}.$$

Vediamo ora un altro modo per rappresentare gli esiti dello scrutinio, che ci servirà per rispondere al punto c). Per semplicità lo descriveremo sul caso numerico $a = 7$, $b = 4$ ma funziona senza nessun cambiamento nel caso generale.
Mettiamoci nel piano cartesiano.

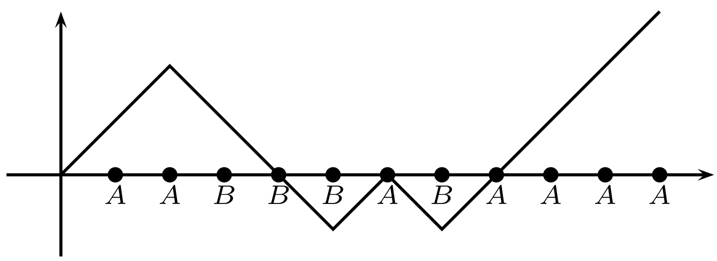
Primo passo. Contrassegniamo ciascun punto dell'asse delle ascisse da 1 a 11 con la lettera A (risp. B) se il voto corrispondente (secondo ordine in cui viene scrutinato) è andato al candidato A (risp. B). Ad esempio, per lo scrutinio della tabella (1), il punto di coordinate $(3, 0)$ corrisponde al terzo voto, che è stato per il candidato B, dunque verrà contrassegnato con la lettera B. In questo modo l'esito dello scrutinio risulta "fotografato" sull'asse delle ascisse (vedi la figura (3), che riporta il caso particolare dello scrutinio (1)).

(3)



Secondo passo. Disegniamo nel piano una spezzata con il criterio seguente. Partiamo dall'origine degli assi. Se il punto $(1, 0)$ è contrassegnato con A, tracciamo il vettore che congiunge l'origine con il punto di coordinate $(1, 1)$; se invece il punto $(1, 0)$ è contrassegnato con B, tracciamo il vettore che congiunge l'origine con il punto di coordinate $(1, -1)$. Ripartendo ora dal punto del piano in cui siamo arrivati, continuiamo disegnando il vettore di componenti $\binom{1}{1}$ oppure $\binom{1}{-1}$ a seconda se il punto successivo sull'asse delle ascisse è contrassegnato con A oppure con B, continuando così fino alla fine. Per esempio, lo scrutinio (1) genera la spezzata della figura sottostante

(4)



È abbastanza facile convincersi che:

(i) ogni spezzata così costruita congiunge l'origine con il punto $P = (11, 3)$ (nel caso generale il punto P avrà cordinate $(a + b, a - b)$);

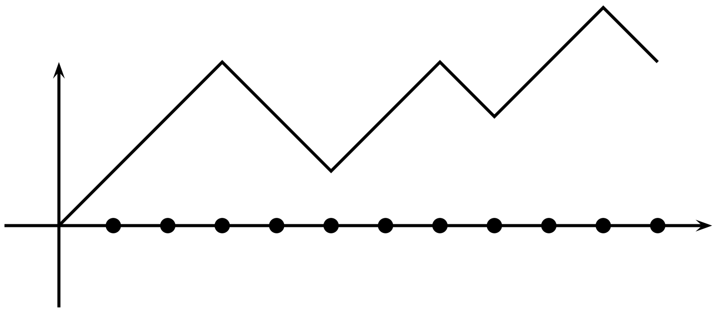
(ii) ciascun esito dello scrutinio genera una diversa sequenza di simboli sull'asse delle ascisse, e tale sequenza genera una sola spezzata.

(iii) Viceversa, da ogni data spezzata è possibile ricostruire lo scrutinio che la ha generata.

Concludiamo che **possiamo identificare Ω con l'insieme di tutte le spezzate del tipo descritto sopra**.

c) **Esercizio 3.** Osserva la spezzata della figura (5) e ricostruisci lo scrutinio che la ha generata.

(5)



Risposta. $AAABBAABAAB$.

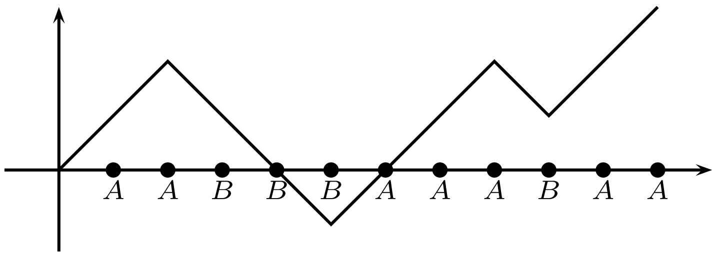
Esercizio 4. Durante lo scrutinio (5) il candidato A si è mantenuto sempre in vantaggio. Da quale proprietà della relativa spezzata puoi dedurre questo fatto? Osserva che la stessa proprietà non vale per la spezzata relativa allo scrutinio (1).

Risposta. La spezzata corrispondente a (5) non tocca l'asse x in alcun punto. Questa proprietà non vale per la spezzata corrispondente a (1): al momento dello scrutinio della quarta scheda A e B hanno lo stesso numero di voti (e di conseguenza la spezzata tocca l'asse x nel punto $(4, 0)$). Lo stesso accade allo scrutinio del sesto e ottavo voto (e infatti la spezzata tocca di nuovo l'asse x nei punti $(6, 0)$ e $(8, 0)$). Concludiamo che E **può essere descritto come il sottoinsieme di Ω composto dalle spezzate che non toccano l'asse x**.

d) **Esercizio 5.** Nel caso numerico, quanti sono i possibili esiti dello scrutinio per i quali il candidato A si mantiene sempre in vantaggio? E in generale?

Risposta. Al solito rispondiamo per il caso numerico, perché il caso generale è identico (basterà sostituire il numero 7 con la lettera a e il numero 4 con la lettera b in ciascun passaggio).
Per quanto abbiamo detto nella risposta all'esercizio 4, si tratta semplicemente di contare le spezzate che congiungono l'origine con il punto $P = (11, 3)$ senza toccare l'asse x.
È ovvio che esse, prima di tutto, devono passare per il punto $Q = (1, 1)$, (se esse passassero per $Q' = (1, -1)$, non potrebbero arrivare in P senza attraversare in qualche punto l'asse delle ascisse).
Tuttavia, tra le spezzate che passano per Q, non tutte vanno bene, perché alcune di esse intersecano comunque l'asse delle ascisse (in qualche punto di ascissa intera maggiore di 1, ovviamente). Osserva per esempio la spezzata della figura (6) qui sotto.

(6)



Per calcolare il numero di spezzate che non toccano l'asse x possiamo allora

(i) contare le spezzate che passano per Q;

(ii) contare le spezzate che passano per Q e intersecano l'asse delle ascisse;

(iii) sottrarre il numero delle seconde dal numero delle prime.

Cominciamo dal passo (i). È facile convincersi che, se guardiamo lo scrutinio a partire dal secondo voto, tutto si svolge come in uno scrutinio (qualsiasi) di 10 = 7+4-1 voti. Applicando allora il risultato dell'esercizio 2, si trova che il numero cercato è

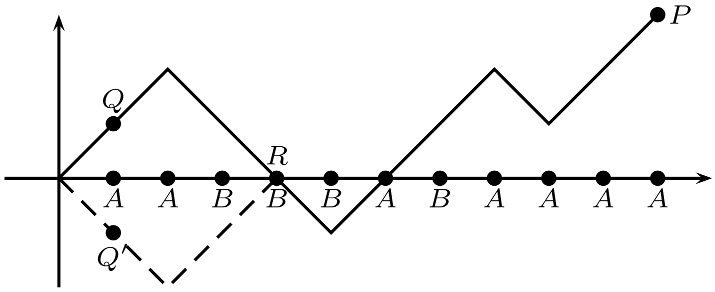
$$C_6^{(10)} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!4!}.$$

e, nel caso generale,

$$C_{a-1}^{(a+b-1)} = \binom{a+b-1}{a-1} = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!}.$$

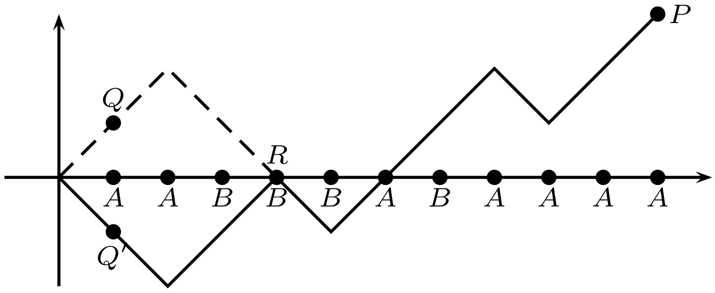
Vediamo ora il passo (ii). Conviene ragionare così (guardare la figura (7) qui sotto): supposta assegnata una spezzata $\mathcal{S}$ che passi da Q e tocchi l'asse delle ascisse nel punto R, ribaltiamo rispetto all'asse delle x la parte di $\mathcal{S}$ che congiunge Q con R; posto $Q' = (1, -1)$, otteniamo così la nuova spezzata $\mathcal{S}'$ che congiunge Q' con P passando per R.

(7)



Viceversa, dato che Q' e P si trovano in semipiani opposti rispetto all'asse delle x (guardare la figura (8) qui sotto), ogni spezzata $\mathcal{S}'$ che congiunga Q' con P deve necessariamente attraversare l'asse delle ascisse in un punto R; ribaltando allora $\mathcal{S}'$ rispetto all'asse x nella sua parte che va da Q' a R, si ottiene una spezzata $\mathcal{S}$ che congiunge Q con P e tocca l'asse delle x (in R).

(8)



Se ne deduce che le spezzate del tipo di $\mathcal{S}$ (che congiungono Q con P toccando l'asse delle x) sono tante quante le spezzate del tipo di $\mathcal{S}'$ (che congiungono Q' con P); dunque basterà contare queste ultime. Per farlo, ragioniamo così: trasliamo gli assi cartesiani portando l'origine nel punto Q'; rispetto ai nuovi assi, le spezzate del tipo di $\mathcal{S}'$ rappresentano gli esiti dello scrutinio dei $10 = 11 - 1$ voti dal secondo in poi, nei quali ovviamente troveremo tutti e 7 i voti per A e $3 = 4 - 1$ voti per B (il primo voto per B è stato eliminato dalla traslazione); sfruttando ancora il risultato dell'esercizio 2, si conclude che le spezzate cercate sono in numero di

$$C_7^{(10)} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!}.$$

Nel caso generale avremo un numero di spezzate pari a

$$C_a^{(a+b-1)} = \binom{a+b-1}{a} = \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}.$$

Siamo infine arrivati al passo finale (iii). Il numero delle spezzate che passano da Q è dato da

$$C_6^{(10)} - C_7^{(10)} = \frac{10!}{6!4!} - \frac{10!}{7!3!} = \frac{10!}{6!3!}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$$

e, nel caso generale,

$$C_{a-1}^{(a+b-1)} - C_a^{(a+b-1)} = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!} - \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!} = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Conclusione

Dunque, per la formula

$$P(E) \doteq \frac{\mathrm{Card}(E)}{\mathrm{Card}(\Omega)},$$

vista all'inizio, si ottiene che la probabilità cercata vale

$$\frac{\frac{10!}{6!3!}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)}{\frac{11!}{7!4!}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{7}}{\frac{11}{7\cdot 4}} = \frac{7}{11} - \frac{4}{11}$$

e, nel caso generale (senza ripetere i calcoli) essa sarà uguale a

$$\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b}.$$