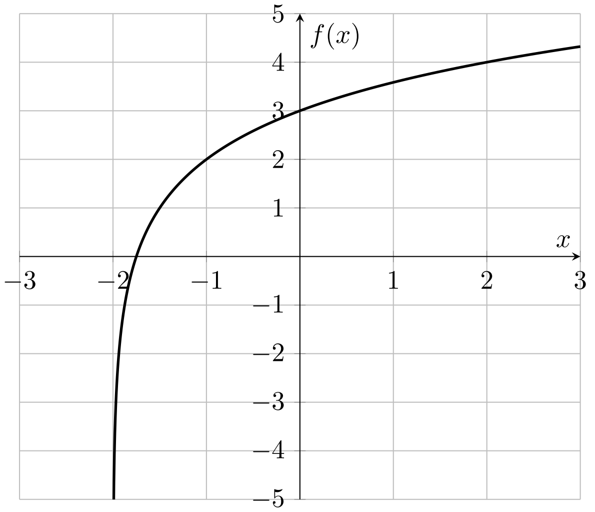
Compito del 19 luglio 2022

Avete 2 ore e 30 minuti di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. La funzione f che ha il grafico riportato sotto, ha una delle seguenti espressioni analitiche:

$$f(x) = ax^2 + bx + ab \qquad f(x) = \frac{a}{x+b} \qquad f(x) = 2^{-ax} + b \qquad f(x) = \log_2(x+a) + b$$



Determinare di quale funzione si tratta (compresi i parametri a e b.)

Esercizio 2. Si determini, se esistono, punti di massimo e minimo della funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 5 + 2x^2 - x^4.$$

Esercizio 3. Due bidoni vengono riempiti da due diversi rubinetti. Il rubinetto che riempe il primo bidone ha una portata costante di $f(t) = 3$ litri su ora. Il rubinetto che riempe il secondo bidone ha invece una portata che varia nel tempo e più precisamente all'istante t (misurato in ore) ha una portata di $g(t) = 3t$ litri su ora.

Indichiamo con $y(t)$ la quantità presente nel primo bidone al tempo t e con $z(t)$ la la quantità presente nel secondo bidone.

Entrambi i bidoni hanno un volume di 1000 litri e all'istante $t = 0$ sono vuoti.

a) Scrivere l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione di y
b) Scrivere l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione di z
c) Dopo quanto tempo il primo bidone sarà pieno?
d) Dopo quanto tempo il secondo bidone sarà pieno?

Esercizio 4. Il tempo (in giorni) prima del prossimo guasto di una delicata apparecchiatura di laboratorio è descritto da una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 1/7$. Qual è il tempo medio prima del prossimo guasto?

Il nostro laboratorio sta usando due di tali apparecchiature per un esperimento che durerà due settimane. Supponendo che i tempi prima del guasto delle due macchine siano indipendenti, qual è la probabilità che entrambe si guastino prima della fine dell'esperimento?

NOTA: se necessario adoperare l'approssimazione $e^{-2} \simeq 0,135$.

Esercizio 5. La media aritmetica delle altezze in un campione di 400 lavoratori (uomini) è di 178,5cm. Con affidabilità del 5%, è ragionevole considerare tale campione come rappresentativo di una grande popolazione di altezza media 178cm, assumendo una deviazione standard di 6cm?

Soluzioni compito del 19 luglio

Esercizio 1. Dal grafico possiamo ipotizzare che la funzione sia del quarto tipo, infatti tende a più infinito per x che tende a più infinito e a meno infinito per x che tende a -2 da destra. In particolare dalla seconda condizione ricaviamo anche che $a = 2$. La funzione è quindi del tipo

$$f(x) = \log_2(x + 2) + b.$$

Per $x = -1$ ricaviamo $2 = f(-1) = \log_2(1) + b$ da cui $b = 2$. Quindi $f(x) = \log_2(x + 2) + 2$.

Esercizio 2. Per x che tende a più infinito la funzione tende a meno infinito, in particolare la funzione non ha punti di minimo. Vediamo se la funzione ha punti di massimo. Calcoliamo la derivata, otteniamo

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$$

Quindi la derivata è positiva per $x < -1$ e per $< 0 < 1$ e negativa per $-1 < x < 0$ e per $1 < x$. In particolare f è crescente nell'intervallo $(-\infty, -1]$ nell 'intervallo $([0, 1])$ e decrescente nell'intervallo $[-1, 0]$ $[1, \infty)$. I $x = -1$ e $x = 1$ sono quindi sicuramente punti di massimo locale e almeno uno dei due è un punto di massimo assoluto. Osserviamo che $f(-1) = f(1) = 6$ e quindi 6 è il valore massimo della funzione.

Esercizio 3. Le due equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione di y e z sono

$$y' = 3 \qquad z' = 3t$$

in entrambi i casi abbiamo inoltre la condizione iniziale $y(0) = z(0) = 0$. Integrando ricaviamo

$$y(t) = 3t \qquad z(t) = \frac{3}{2}t^2.$$

Quindi il primo bidone sarà pieno a $t = 1000/3\,ore$ e il secondo bidone sarà pieno a $t = \sqrt{2000/3}\,ore$.

Esercizio 4. Indichiamo con X, Y due variabili esponenziali indipendenti di parametro $\lambda = 1/7$. La risposta alla prima domanda è il valore atteso della variabile X, che per quanto visto sappiamo essere

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 7.$$

La seconda domanda invece chiede di calcolare la probabilità che X e Y (i tempi del prossimo guasto delle due apparecchiature) siano entrambi inferiori a 14 (giorni), ovvero

$$\mathbb{P}(X \leqslant 14, Y \leqslant 14) = \mathbb{P}(X \leqslant 14)\mathbb{P}(Y \leqslant 14) = \mathbb{P}(X \leqslant 14)^2 = F_X(14)^2,$$

in cui il primo passaggio si deve all'indipendenza, il secondo al fatto che le due variabili hanno la stessa distribuzione esponenziale, e nel terzo appare la funzione di ripartizione della variabile esponenziale, $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Vale dunque

$$\mathbb{P}(X \geqslant 14, Y \geqslant 14) = F_X(14)^2 = (1 - e^{-14/7})^2 = (1 - e^{-2})^2 \simeq 0,75.$$

Esercizio 5. Eseguiamo il test Z per la media m delle variabili Gaussiane che rappresentano l'altezza dei lavoratori con deviazione standard nota $\sigma = 6$. L'ipotesi nulla è $H_0) m = 178$. Indichiamo con $x_1, \dots, x_{400}$ le misure effettuate sui lavoratori, di cui conosciamo la media aritmetica

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{400}}{400} = 178,5.$$

La quantità pivot è

$$\frac{(x_1 - 178) + \cdots (x_{400} - 178)}{\sigma\sqrt{400}} = \sqrt{400}\frac{\frac{x_1+\cdots+x_{400}}{400} - 178}{\sigma} = 20\frac{178,5 - 178}{6} = \frac{10}{6} \simeq 1,67.$$

Concludiamo controllando se questo valore cade o meno nell'intervallo di fiducia $[-t^*, t^*]$ in cui la variabile Gaussiana standard cade con probabilità $1 - \alpha$. Imponiamo $\mathbb{P}(|Z| < t^*) = 1 - \alpha$, con $Z \sim N(0, 1)$, da cui con i soliti passaggi

$$\Phi(t^*) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975, \quad t^* \simeq 1,96$$

(facendo uso della tavola per Φ). La quantità pivot cade nell'intervallo: non possiamo dunque rigettare l'ipotesi nulla e il campione può essere considerato rappresentativo.