1. Esercizi prima settimana

Esercizio 1.1. Sia data una successione della forma

$$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$$

Una tale successione è esatta (ovvero P è il quoziente $N/\varphi(M)$) se e solo

indent i) $\psi \circ \varphi = 0$;

iindent ii) per ogni Q e per ogni $f : N \longrightarrow Q$ tale che $f \circ \varphi = 0$ esiste ed è unico $g : P \longrightarrow Q$ tale che $g \circ \psi = f$.

Dare una descrizione simile per il nucleo di una applicazione.

Esercizio 1.2. Si completi la dimostrazione che se

$$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$$

è esatta allora la successione

$$Q \otimes M \xrightarrow{I \otimes \varphi} Q \otimes N \longrightarrow Q \otimes P \longrightarrow 0$$

è esatta utilizzando la caratterizzazione dell'esercizio precedente e la proprietà universale del prodotto tensore.

Esercizio 1.3. Si dimostri che le seguenti proprietà sono locali

(1) essere un modulo piatto,
(2) se A è un dominio, avere torsione nulla.
(3) essere una successione esatta di A-moduli.

Esercizio 1.4. Mostrare che la proprietà di essere noetheriano per un anello non è un fatto locale esibendo un anello non noetheriano le cui localizzazioni negli ideali primi sono tutte notheriane.

Esercizio 1.5. Dimostrare che le quattro formulazioni del teorema degli zeri di Hilbert date in classe sono equivalenti.

Esercizio 1.6. Sia $f : \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ di gruppi abeliani e tale che $f(e_i) = 0$ per ogni i. Allora $f = 0$.

Esercizio 1.7. Si dimostri che $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ non è un modulo libero.

Esercizio 1.8. Sia $X = \operatorname{Spec} A$. Si dimostri che X è compatto.

Esercizio 1.9. Un punto $\mathfrak{p}$ di $\operatorname{Spec} A$ è chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è massimale.

2. Esercizi seconda settimana

Esercizio 2.1. Calcolare $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n$, $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/m$.

Esercizio 2.2. Sia A un dominio e M un A modulo piatto.

(1) Si dimostri che M ha torsione nulla;
(2) Sia A un dominio, M e N moduli piatti e $m \in M$ e $n \in N$. Si dimostri che $m \otimes n = 0$ se e solo se $m = 0$ o $n = 0$.
(3) Si dia un controesempio se si rimuove l'ipotesi che N sia piatto.

Esercizio 2.3. Sia A un anello, I un ideale di A e $f \in A$ e $X = \operatorname{Spec} A$. I seguenti spazi tologici sono omeomorfi:

(1) $\operatorname{Spec} A \simeq \operatorname{Spec} A/\sqrt{0}$;
(2) $\operatorname{Spec} A/I \simeq V(I) \subset \operatorname{Spec} A$;
(3) $\operatorname{Spec} A_f \simeq X_f$.

Esercizio 2.4. Sia $\operatorname{Spec} A$ sconnesso. Si dimostri che $A = B \times C$.

Esercizio 2.5. Sia E un campo non necessariamente algebricamente chiuso e sia $E \subset A$ con A finitamente generato su E. Si dimostri che per ogni ideale I di A vale

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I \text{ massimale}} \mathfrak{m}.$$

Esercizio 2.6. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots]$ non è noetheriano.

Esercizio 2.7. Dimostrare che
$$\mathbb{C}[x^4, x^3y, xy^3, y^4] \simeq \mathbb{C}[a,b,c,d]/(ad-bc, c^3-bd^2, b^3-ca^2, b^2d-c^2a).$$

Esercizio 2.8. Sia $f : A \longrightarrow B$, $\varphi = f^* : Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$. Sia $\mathfrak{q}$ un primo di B e sia $Y_{\mathfrak{q}} = \{Q \in Y : Q \subset \mathfrak{q}\}$ (che è omeomorfo a $\operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}}$). Si dimostri che
$$\varphi(Y_{\mathfrak{q}}) = \bigcap_{b \notin \mathfrak{q}} \varphi(Y_b).$$

Esercizio 2.9. Sia M un A modulo finitamente presentato (se non si sa cosa vuol dire finitamente presentato si può assumere A noetheriano e M finitamente generato) e sia S una parte moltiplicativa di A allora
$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M,N) \simeq \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

Esercizio 2.10. Sia A noetheriano, I un ideale di A e $a \in A$. Dimostrare che $a \in I$ se e solo se $a_{\mathfrak{p}} \in I_{\mathfrak{p}}$ per ogni $\mathfrak{p}$ associato ad I.

3. Esercizi terza settimana

Per giovedi' 26 ottobre si devono consegnare 5 esercizi scelti tra: 1.4, 2.5, 2.7, 2.8, 3.1, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.10. Si devono consegnare almeno tre esercizi 3.* e l'esercizio 3.4 è obbligatorio.

Esercizio 3.1. Sia M un A modulo e sia U un aperto di $X = \operatorname{Spec} A$. Definisco
$$\mathcal{M}(U) = \{\mu = (\mu_{\mathfrak{p}}) \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} \,:\, \forall \mathfrak{p} \in U\ \exists f \in A \text{ e } m \in M \text{ tale che } \mathfrak{p} \in X_f \subset U, \text{ e } \mu_{\mathfrak{q}} = (m/f)_{\mathfrak{q}} \text{ per ogni } \mathfrak{q} \in X_f\}$$
Dimostrare che $\mathcal{M}(X_f) = M_f$.

Esercizio 3.2. Dimostrare che $\Bbbk((t))$ non è algebrico su $\Bbbk(t)$.

Esercizio 3.3. Sia $f : A \longrightarrow B$ tale che f^* è chiusa. Allora f soddisfa la proprietà del going up.

Esercizio 3.4. Sia $\Bbbk$ un campo. Dimostrare che $A = \Bbbk[X,Y]/(Y^3 - X^5)$ è un dominio e descrivere la sua normalizzazione (cioè la chiusura integrale di A nel suo campo delle frazioni).

Esercizio 3.5. Sia C la normalizzazione di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots]$. Dimostrare che non è noetheriano.

Esercizio 3.6. Sia $A \subset B$ una estensione intera, $\Bbbk$ un campo algebricamente chiuso e $f : A \longrightarrow \Bbbk$ un morfismo di anelli. Dimostrare che f si può estendere a tutto B.

Definizione. *Un anello si dice irriducibile se il suo radicale è un ideale primo.*
Uno spazio tologico si dice irriducibile se non è l'unione di due chiusi propri.

Esercizio 3.7. Si dimostri che $\operatorname{Spec} A$ è irriducibile se e solo se A è irriducibile.

Definizione. *Un anello si dice indecomponibile, se non è il prodotto diretto di due sottoanelli propri o equivalentemente, per l'esercizio 2.4, se il suo spettro è connesso.*

Esercizio 3.8. Sia A un anello noetheriano. Dimostrare che A si scrive come prodotto di anelli indecomponibili in modo unico (ovvero se $A = A_1 \times \cdots \times A_k$ con gli A_i iindecomponibili, e $\varphi : A \longrightarrow B_1 \times \cdots \times B_h$ è un isomorfismo e i B_i sono indecomponibili allora $h = k$ e a meno di permutazione $\varphi(A_i) = B_i$).

Esercizio 3.9. Sia $f : A \longrightarrow B$. Si dimostri che soddisfa la proprietà del going down se e solo se per ogni $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ la mappa indotta $\operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}} \longrightarrow \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$ è suriettiva.

Esercizio 3.10. Sia $f : A \longrightarrow B$, $\varphi = f^* : Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$. Si dimostri che se φ è aperta allora f soddisfa la proprietà del going down.

Esercizio 3.11. Si dimostri che se $f : A \longrightarrow B$ è piatta allora soddisfa la proprietà del going down. [Siano $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ primi di A e sia $\mathfrak{q}_2$ un primo di $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}_1$ e sia I l'estensione di $\mathfrak{p}_1$ in B. Si mostri preliminarmente che $A/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow B/I$ è piatta e se ne deduca che è iniettiva.]

4. Esercizi quinta settimana

Esercizio 4.1. Sia $\Bbbk$ un campo e sia A una $\Bbbk$-algebra finitamente generata. Si dimostri che A è artiniana se e solo se $\dim_{\Bbbk} A < \infty$.

Esercizio 4.2. Sia $\Bbbk$ un campo e sia $A = \Bbbk[x] \times \Bbbk[y, z]$. Si esibiscano due insiemi massimali di elementi di A algebricamente indipendenti su $\Bbbk$ di cardinalità diversa.

Esercizio 4.3. Si calcoli la dimensione $p(\ell)$ come k spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado ℓ in n variabili e si verifiche l'affermazione fatta in classe sul gradeo del "polinomio" $\ell \mapsto p(\ell)$

Esercizio 4.4. Si dimostri che per i fibrati vettoriali tautologici su $\mathbb{P}^n(\Bbbk)$ sono localmente banali.

Esercizio 4.5. Si dimostri che il fibrato vettoriale tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e il fibrato vettoriale tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è non banale.

Esercizio 4.6. Sia M un A modulo, $X = \operatorname{Spec} A$ e siano $f_1, \dots, f_n \in A$ tali che $\bigcup X_{f_i} = X$. Si dimostri che se M_{f_i} è finitamente generato per ogni i allora M è finitamente generato.

Esercizio 4.7. Sia A commutativo con uno. Se M è un A modulo definiamo l'algebra tensoriale TM come $\bigoplus_{n \geqslant 0} M^{\otimes n}$ con il prodotto definito da

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_n).$$

Dimotrare che ha la seguente proprietà universale: per ogni A-algebra associativa (ma non necessariamente commutativa) B e per ogni $\varphi : M \longrightarrow B$ di A-moduli esiste unico $\bar{\varphi} : TM \longrightarrow B$ di A algebre che estende φ. ($M^{\otimes 0} = A$ e $1 \cdot x = x$)

Esercizio 4.8. Sia A commutativo con uno. Se M è un A modulo definiamo il prodotto simmetrico $S^n M$ è definito nel modo seguente:

$$S^n M = M^{\otimes n} / (\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n = x_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma_n} : x_i \in M \text{ e } \sigma \text{ permutazione}\})$$

Si definisce inoltre l'algebra simmetrica SM come

$$SM = TM/(x \otimes y = y \otimes x : x, y \in M)_{\text{ideale generato}}$$

Si descrivano le proprietà universali che caratterizzano SM e $S^n M$ e si dimostri che $\bigwedge M = \bigoplus \bigwedge^n M$.

Esercizio 4.9. Sia A commutativo con uno. Se M è un A modulo definiamo il prodotto esterno $\bigwedge^n M$ nel modo seguente:

$$\bigwedge^n M = M^{\otimes n} / (\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n = 0 : x_i \in M \text{ e se due delle } x_i \text{ sono uguali}\})$$

Si definisce inoltre l'algebra esterna $\bigwedge M$ come

$$\bigwedge M = TM/(x \otimes x = 0 : x \in M)_{\text{ideale generato}}$$

Si descrivano le proprietà universali che caratterizzano $\bigwedge M$ e $\bigwedge^n M$ e si dimostri che $\bigwedge M = \bigoplus \bigwedge^n M$. [puo' essere d'aiuto psicologico fare il caso in cui A è un campo di caratteristica diversa da 2 a parte]

5. Quello che è rimasto in sospeso sui moduli localmente liberi

In questa sezione sono contenuti alcuni esercizi sui moduli localmente liberi. Se M è un A modulo definiamo $M^* = \operatorname{Hom}(M, A)$. La traccia è la mappa $M^* \otimes M \longrightarrow A$ definita da $\varphi \otimes m \longrightarrow \varphi(m)$.

Esercizio 5.1. Sia M un A modulo localmente libero (secondo la definizione 1 usata in classe) di rango r e sia $B = \mathsf{S}_A M$. Allora $Y = \operatorname{Spec} B$ ha una struttura naturale di fibrato vattoriale di rango r su $X = \operatorname{Spec} A$. Descrivere esplicitamente i morfismi di anelli che definiscono somma, prodotto per scalare proiezione da Y a X.

Esercizio 5.2. Dimostrare che se M è un A-modulo e esistono $f_1, \dots, f_n \in A$ tali che $(f_1, \dots, f_n) = A$ e M_{f_i} è finitamente generato allora M è finitamente generato.

Esercizio 5.3. Siano M e N due moduli finitamente presentati tali che $M_m \simeq N_m$ per un ideale primo m di A. Allora esiste $f \notin m$ tale che $M_f \simeq N_f$.

Esercizio 5.4. Se M è un A modulo localmente libero di rango r allora M^* è un A modulo localmente libero di rango r e $(M^*)^* \simeq M$.

Se inoltre N è un A modulo localmente libero di rando s allora $M \otimes N$ è un modulo localmente libero di rango $r + s$ e $\operatorname{Hom}(M, N) \simeq M^* \otimes N$.

Esercizio 5.5. Sia M un A modulo. Allora M è un A modulo localmente libero di rango 1 se e solo se $Tr_M : M^* \otimes M \longrightarrow A$ è un isomorfismo.

Definiamo

$$\mathrm{Pic}(A) = \{A - \text{moduli localmente liberi di rango } 1\}/isomorfismo$$

Il prodotto tensore fornisce a $\mathrm{Pic}(A)$ una stuttura di gruppo nella quale l'inverso della classe di M è la classe di M^*. Gli esercizi che seguono forniscono una descrizione alternativa di questo gruppo. In tutto quello che segue assumiamo A dominio noetheriano e poniamo K ilcampo dei quozienti di A.

Un A-sottomodulo di K che sia finitamente generato e che non sia 0 si dice un ideale frazionario. Se I è un ideale frazionario poniamo

$$I^{-1} = \{a \in K \,:\, aI \subset A\}$$

Se I e J sono ideali frazionari, allora IJ è l'A sottomodulo di K generato dai prodotti ij con $i \in I$ e $j \in J$.

Esercizio 5.6. mostrare che se I e J sono frazionari allora I^{-1} e IJ sono frazionari.

In generale abbiamo che $I^{-1}I \subset A$. Se vale l'uguaglianza si dice che I è invertibile.

Esercizio 5.7. Se I e J sono ideali invertibili allora I^{-1} è invertibile e IJ è invertibile.

L'insieme degli ideali invertibili è un gruppo e l'insieme degli ideali frazionari principali, ovvero degli ideali della forma Au con $u \in K^*$ è un sottogruppo. Definiamo il gruppo delle classi di divisori di Cartier

$$CaCl(A) = \{\text{ideali invertibili}\}/\{\text{ideali frazionari principali}\}.$$

Esercizio 5.8. Se I e J sono ideali frazionari che sono anche A moduli localmente liberi, allora sono di rango 1 e valgono i seguenti isomorfismi

(1) $I \otimes J \simeq IJ$
(2) $Hom(I, J) \simeq I^{-1}J$

Esercizio 5.9. Si dimostri che un ideali frazionario è invertibile se e solo se è un A modulo localmente libero di rango 1. Si dimostri che c'è un isomorfismo di gruppi

$$\mathrm{Pic}(A) \simeq CaCl(A).$$

Se per ogni primo di altezza 1 del dominio noetheriano A la localizzazione A_P è regolare ovvero, è un dominio di valutazione discreta, (si dice che A è regolare in codimensione 1) possiamo un ulteriore gruppo che come vedremo è legato ai precedenti. Per ogni P di altezza 1 sia $v_P : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ la valutazione associata. Sia $\mathrm{Div}(A)$ il gruppo dei divisori di Weil ovvero il gruppo libero che ha come base i primi di altezza 1 di A. Se $f \in K^*$ definiamo

$$div(f) = \sum_{P:ht(P)=1} v_P(f)\, P \in \mathrm{Div}(A)$$

Esercizio 5.10. Dimostrare che per ogni $f \in K^*$ il divisore $div(f)$ è ben definito ovvero che esiste solo un numero finito di primi di altezza 1 tali che $v_P(f) \neq 0$.

Definiamo il gruppo delle classi dei divisori di Weil

$$Cl(A) = \mathrm{Div}(A)/\{div(f) : f \in K^*\}.$$

Possiamo costruire una mappa dagli ideali frazionari ai divisori di Weil nel seguente modo: se I è un ideale frazionario e P è un primo di altezza l'insieme $\{v_P(x) stx \in I\}$ avrà un elemento minimo poiché I è finitamente generato. Indico questo elemento con $v_P(I)$.

Si assuma nei tre esercizi che seguono che A sia un dominio noetheriano e che A_m sia fattoriale per ogni ideale primo m, in particolare A è regolare in codimensione 1.

Esercizio 5.11. Si dimostri che

(1) se P è un ideale primo di A che è invertibile allora $ht(P) = 1$.
(2) se I è un ideale di A che è invertibile e P è associato ad A allora P è invertibile.
(3) se I è un ideale invertibile di K e $v_P(I) \neq 0$ allora P è invertibile.
(4) se I è un ideale invertibile di K allora esiste solo un numero finito di ideali di altezza 1 tali che $v_P(I) \neq 0$.

L'esercizio precedente permette di costruire una mappa Φ dagli ideali invertibili ai divisori di Weil nel seguente modo

$$\Phi(I) = \sum_{ht(P)=1} v_P(I)P$$

Esercizio 5.12. (1) Si dimostri che questa mappa induce una mappa di gruppi da $\phi : CaCl(A) \longrightarrow Cl(A)$;
(2) Si dimostri che ogni ideale invertibile è prodotto di un numero finito di ideali primi invertibili [Ci si riduce al caso in cui $I \subset A$. Si consideri l'insieme degli ideali $I \subset A$ invertibili che non siano prodotto di un numero finito di ideali primi invertibili. Si consideri un elemento massimale in questo insieme e si consideri un primo associato a questo ideale che per l'esercizio precedente è primo a sua volta e verifica $I \subset P^{-1}I \subset A$]
(3) si dimostri che se I è un ideale invertibile allora $I = \prod_{ht(P)=1} P^{v_P(I)}$
(4) si dimostri che le mappe Φ e ϕ sono iniettive

Esercizio 5.13. Si assuma adesso che A sia un anello in cui tutte le localizzazioni A_P siano fattoriali (per tutti gli ideali primi, non solo per quelli di altezza uno). Si dimostri che
(1) A è normale e in particolare è regolare in codimensione uno
(2) se P ha altezza uno allora P è invertibile
(3) Φ e ϕ sono isomorfismi

Vale inoltre il seguente risultato: se A è un anello locale noetheriano e regolare allora A è fattoriale, che permette di utilizzare il criterio dell'ultimo esercizio in molte situazioni interessanti. Questo teorema però

Criterio per la normalità e teorema di Hartogs. Esiste il seguente criterio per stabilire se un dominio è normale. Spesso questo criterio è detto di Serre, in realtà il risultato di Serre è una generalizzazione di questo risultato al caso di anelli che non siano domini. Il caso di domini sono quasi sicuro che sia precedente al risultato di Serre, ma non ricordo di chi sia.

Il criterio è il seguente: un dominio A è normale se e solo se valgono le due seguenti condizioni:
(1) per ogni $a \in A$ non nullo, ogni primo associato ad a è di altezza 1, ovvero è minimale.
(2) se P è un primo di altezza 1 allora A_P è un dominio di valutazione discreta (quella che sopra abbiamo chiamato regolarità in codimensione 1).

Il teorema di Hartogs è invece un teorema che riguarda l'estensione di funzioni olomorfe definite su insiemi di codimensione 2. La sua versione algebrica è la seguente. Se A è un domiono normale allora

$$A = \bigcap_{ht(P)=1} A_P \subset K.$$

Esercizio 5.14. Si dimostri che un dominio noetheriano è fattoriale se e solo se ogni primo minimale è principale.

Esercizio 5.15. Se A è un dominio e $x \in K$, il suo campo dei quozienti allora $x \in A$ se e solo $x \in A_P$ per ogni primo P associato a qualche elemento non nullo di A.

Esercizio 5.16. Dedurre dall'esercizio precedente che se valgono le condizioni (1) e (2) sopra allora l'anello è normale e vale $A = \bigcap_{ht(P)=1} A_P \subset K$.

Esercizio 5.17. Dimostrare che se A è un dominio normale allora valgono le condizioni (1) e (2). [Ci si riduce al caso locale con P massimale associato ad un elemento non nullo. Allora $P \supset P \cdot P^{-}1 \subset A$ e si analizzano i due casi separatamente]

Esercizio 5.18. Dimostrare che se A è un dominio allora A è fattoriale se e solo se A è normale e $Cl(A) = 0$.

6. Esercizi sesta settimana

Esercizio 6.1. Siano Γ e G due gruppi e supponiamo che Γ agisca su G e che $H^1(\Gamma, G)$ sia banale.

Sia X inoltre un insieme sul quale agiscono sia G che Γ in modo compatibile ovvero

$${}^{\gamma}(g \cdot x) = {}^{\gamma}g \cdot {}^{\gamma}x \qquad \text{per ogni } \gamma \in \Gamma,\ g \in G;\ x \in X.$$

Si supponga inoltre che l'azione di G su X sia transitiva. Sia $x_0 \in X^\Gamma$ allora $S = \mathrm{Stab}_G(x_0)$ è stabile per l'azione di Γ. Si dimostri che

$$X^\Gamma / G^\Gamma \longleftrightarrow H^1(\Gamma, S).$$

Esercizio 6.2. Sia $K \subset L$ una estensione di Galois e sia $\Gamma = \mathrm{Gal}(L, K)$. Sia V_0 uno spazio vettoriale su K di dimensione finita e sia $\phi \in V_0^{p,q} = V_0^{\otimes p} \otimes (V_0^*)^{\otimes q}$. Il gruppo $G_0 = GL_K(V_0)$ agisce su $V_0^{p,q}$ nel modo standard. Sia inoltre $V = L \otimes_K V_0$ e sia $G = GL_L(V)$ che agisce su V e sia $S = \mathrm{Stab}_G(\phi)$.

Il gruppo Γ agisce su G via ${}^{\gamma}g = \gamma \circ g \circ \gamma^{-1}$. Dedurre dall'esercizio precedente che

$$\{\psi \in V_0^{p,q} \,:\, \exists g \in G \text{ tale che } g \cdot \phi = \psi\}/G_0 \longleftrightarrow H^1(\Gamma, S)$$

Esercizio 6.3. Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ sia un morfismo di Γ-gruppi, ovvero Γ è un gruppo che agisce su A e B e $\varphi({}^{\gamma}a) = {}^{\gamma}\varphi(a))$. Dimostrare che l'applicazione $c_\gamma \mapsto \varphi(c_\gamma)$ definisce un morfismo di insieme puntati $H^1(\varphi) : H^1(\Gamma, A) \longrightarrow H^1(\Gamma, B)$. Dimostrare inoltre che $H^1(\varphi \circ \psi) = H^1(\varphi) \circ H^1(\psi)$.

Esercizio 6.4. Siano A, B, C tre gruppi sui quali agisce il gruppo Γ e siano

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 1$$

una successione esatta Γ-gruppi. Allora esiste $\delta : C^\Gamma \longrightarrow H^1(\Gamma, A)$ di insiemi puntati tale che la successione

$$1 \longrightarrow A^\Gamma \xrightarrow{\varphi} B^\Gamma \xrightarrow{\psi} C^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, A) \xrightarrow{H^1(\varphi)} H^1(\Gamma, B) \xrightarrow{H^1(\varphi)} H^1(\Gamma, C)$$

è esatta.

Esercizio 6.5. Sia $K \subset L$ una estensione di Galois e sia $\Gamma = \mathrm{Gal}(L, K)$ Assumiamo inoltre che la caratteristica del campo sia diversa da 2. Il gruppo simplettico $Sp(2n, L)$ è il seguente sottogruppo simplettico stabile per l'azione di Γ:

$$Sp(2n, L) = \{g \in GL(2n, L) \,:\, g \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right) g^t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)\}.$$

Si dimostri che $H^1(\Gamma, Sp(2n, L)) = 1$.

Esercizio 6.6. Sia $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$. Si calcoli la cardinalità di $H^1(\Gamma, O(n, \mathbb{C}))$. $O(n)$ è il gruppo delle matrici X tali che $X^t\, X = id$.

Esercizio 6.7. Sia $K \subset L$ una estensione di Galois finita (non serve ma si può assumere) e sia Γ il gruppo di Galois. Dimostrare che $H^1(\Gamma, SL(n, L))$ è banale.

Esercizio 6.8. Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ sia un morfismo continuo di gruppi topologici. Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento di X. Dimostrare che l'applicazione $c_{\alpha,\beta} \mapsto \varphi \circ c_{\alpha,\beta}$ definisce un morfismo di insieme puntati $H^1(\mathcal{U}, \varphi) : H^1(\mathcal{U}, A) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, B)$ e al limite un morfismo $H^1(\varphi) : H^1(X, A) \longrightarrow H^1(X, B)$. Dimostrare inoltre che $H^1(\varphi \circ \psi) = H^1(\varphi) \circ H^1(\psi)$.

Esercizio 6.9. Siano A, B, C tre gruppi topologici e siano

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 1$$

una successione esatta con φ e ψ continue. Indichiamo inoltre con $H^0(X, G) = C^0(X, G)$ l'insieme delle applicazioni continue da X a G. Allora esiste $\delta \longrightarrow H^1(\Gamma, A)$ di insiemi puntati tale che la successione

$$1 \longrightarrow H^0(X, A) \xrightarrow{\varphi\circ\cdot} H^0(X, B) \xrightarrow{\psi\circ\cdot} H^0(X, C) \xrightarrow{\delta} H^1(X, A) \xrightarrow{H^1(\varphi)} H^1(X, B) \xrightarrow{H^1(\varphi)} H^1(X, C)$$

è esatta.

Esercizio 6.10. Siano $f : X \longrightarrow Y$ una applicazione continue tra spazi topologici. Sia G un gruppo topologico. Se $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ è un ricoprimento di Y allora $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V_\alpha)\}$ e la mappa $c_{\alpha,\beta} \mapsto c_{\alpha,\beta} \circ f$ induce una mappa

$$H^1(\mathcal{V}, f) : H^1(\mathcal{V}, G) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, G)$$

e passando al limite una mappa $f^* : H^1(Y, G) \longrightarrow H^1(X, G)$. Si dimostri inoltre che $(fg)^* = g^* \circ f^*$.

Esercizio 6.11. Siano $f : X \longrightarrow Y$ una applicazione continue tra spazi topologici. Sia G un gruppo topologico. Se $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ è un ricoprimento di Y allora $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V_\alpha)\}$ e la mappa $c_{\alpha,\beta} \mapsto c_{\alpha,\beta} \circ f$ induce una mappa

$$H^1(\mathcal{V}, f) : H^1(\mathcal{V}, G) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, G)$$

e passando al limite una mappa $f^* : H^1(Y, G) \longrightarrow H^1(X, G)$. Si dimostri inoltre che $(fg)^* = g^* \circ f^*$.

7. Esercizi settima settimana

Entro venerdì 24 prima dell'inizio della lezione si devono consegnare (in tutto sono sei)

un esercizio a scelta tra 6.4 e 6.9

un esercizio a scelta tra 7.1 e 7.2.

un esercizio a scelta tra 7.3, 7.4 e 7.5.

un esercizio a scelta tra 7.6 e 7.7.

lo so questi quattro esercizi sono un po' tra ip iù noiosi, ma è un genere di verifiche che secondo me è istruttivo fare almeno una volta.

chi ha fatto la tesi in topologia o geometria differenziale deve consegnare l'esercizio 4.5.

chi ha fatto la tesi in algebra o geometria algebrica deve consegnare un esercizio a scelta tra 5.9 o 5.11

chi non ha fatto la tesi in algebra, geometria algebrica, topologia o geometria differenziale deve consegnare un esercizio a scelta tra 4.8 e 4.9

si deve inoltre scegliere un esercizio dalla seguente lista: 4.1, 5.3, 5.5, 5.15, 5.17, 5.18, 6.1, 6.2, 6.5, 6.6, 6.7.

Per gli esercizi sulle categorie abeliane proposti non si può usare il teorema di immersione. Per tutti gli altri esercizi si possono usare tutti i risultati enunciati a lezione, anche quelli non dimostrati, e i risultati degli esercizi che precedono l'esercizio in questione.

Esercizio 7.1 (Lemma di Yoneda)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Per $x \in \mathcal{C}$ si consideri il funtore $h_x : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$, la categoria degli insiemi, definito da

$$h_x(y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \quad \text{ e } \quad h_x(f) = f \circ \cdot : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$$

per ogni $y, z \in Ob(\mathcal{C})$ e per ogni $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$

(1) Si dimostri che c'è una bigezione tra le trasformazioni naturali tra h_x e un funtore $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ e $G(x)$.

(2) Si dimostri che se h_x e h_y sono naturalmente equivalenti allora x è isomorfo a y.

Esercizio 7.2. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana nella quale esistono coprodotti qualsiasi, cioè per ogni collezione di oggetti x_i (anche infinita) esiste il coprodotto degli x_i che nel caso di categorie abeliane si indica spesso con $\oplus x_i$ in analogia con i moduli su un anello. Sia p un oggetto proiettivo di $\mathcal{A}$ tale che se $h_p(x) = 0$ allora $x = 0$ e si supponga inoltre che $\mathrm{Hom}(p, \oplus x_i) = \oplus \mathrm{Hom}(p, x_i)$. Sia $R = \mathrm{End}(p)$ che è un anello unitario non per forza commutativo. Si osservi che per ogni x, il gruppo abeliano $\mathrm{Hom}(p, x)$ ha una struttura di R-modulo destro e si dimostri che il funtore $h_p : \mathcal{A} \longrightarrow R\!-\!mod\,destri$ è una equivalenza di categorie. (h_p è il funtore definito nell'esercizio precedente.)

Fare un esempio di una categoria abeliana e di un oggetto p con queste proprietà.

Esercizio 7.3. Si dimostri che nella categoria degli insiemi esistono limiti proiettivi e induttivi e si descrivano.

Esercizio 7.4. Si dimostri che nella categoria degli A moduli esistono limiti proiettivi e induttivi e si descrivano.

Esercizio 7.5. Si dimostri che nella categoria degli anelli commutativi unitari esistono prodotti e coprodotti arbitrari e si descrivano.

Esercizio 7.6. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie abeliane e sia F un funtore da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Allora F è additivo se e solo se F preserva i prodotti finiti.

Esercizio 7.7. (1) Sia $\mathcal{A}$ una categoria additiva. Dimostrare che se $\varphi : x \longrightarrow y$ è il nucleo di un morfismo allora è un monomorfismo.

(2) Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Dimostrare che se φ è un monomorfismo allora $\varphi = \ker \mathrm{coker}\, \varphi$.

(3) Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Sia $\varphi : x \longrightarrow y$ un morfismo e sia $\alpha : x \longrightarrow i$ e $\beta : i \longrightarrow y$ un'immagine di φ. Dimostrare che $\ker \alpha = \ker \varphi$ e che $\mathrm{coker}\, \beta = \mathrm{coker}\, \varphi$.

(4) Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Sia $\varphi : x \longrightarrow y$ un morfismo e siano $\alpha : x \longrightarrow i$ e $\beta : i \longrightarrow y$ e $\alpha' : x \longrightarrow i'$ e $\beta' : i' \longrightarrow y$ due immagini di φ. Allora esiste un unico isomorfismo $\gamma : i \longrightarrow i'$ tale che $\alpha' = \gamma\alpha$ e $\beta = \beta'\gamma$.

Esercizio 7.8. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Sia data una successione

$$a \xrightarrow{\varphi} b \xrightarrow{\psi} c$$

tale che $\psi\varphi = 0$. Si dimostri che $Im\varphi = \ker \varphi$ se e solo se $Im\psi = \mathrm{coker}\, \varphi$.

8. Esercizi nona settimana

Esercizio 8.1. Sia A^* un complesso limitato di gruppi abeliani finiti. Si dimostri che
$$\prod_i \operatorname{card}(A^i)^{(-1)^i} = \prod_i \operatorname{card}(H^i(A^*))^{(-1)^i}$$

Esercizio 8.2. Sia A^* un complesso limitato di spazi vettoriali di dimensione finita su K. Si dimostri che
$$\sum_i (-1)^i \dim_K(A^i) = \sum_i (-1)^i \dim_K(H^i(A^*))$$

Esercizio 8.3. Siano X^* e Y^* due complessi. Si consideri il complesso doppio in cui $Z^{i,j} = \operatorname{Hom}(X^{-i}, Y^j)$ e mappe orizzontali e verticali indotte dai bordi di X^* e Y^*. Si definisce $\operatorname{THom}(X^*, Y^*)$ come il complesso totale associato a questo complesso doppio. Si dimostri che
$$H^0(\operatorname{THom}(X^*, Y^*)) \simeq \operatorname{Hom}_{Kom}(X^*, Y^*).$$

Si dimostri inoltre che se X^* e U^* sono isomorfi a meno di omotopia allora i complessi $\operatorname{THom}(X^*, Y^*)$ e $\operatorname{THom}(U^*, Y^*)$ sono isomorfi a meno di omotopia. Similmente per la seconda variabile.

Esercizio 8.4. Sia X^* un complesso limitato dall'alto e Y^* un complesso limitato dal basso. Sia P^* una risoluzione proiettiva di X^* limitata dall'alto, I^* una risoluzione iniettiva di Y^* limitata dal basso. Si dimostri che i tre seguenti complessi sono quasi isomorfi:
$$\operatorname{THom}^*(X^*, I^*) \qquad \operatorname{THom}^*(P^*, I^*) \qquad \operatorname{THom}^*(P^*, Y^*).$$
Tale complesso si indica con $\operatorname{RHom}(X^*, Y^*)$. Si noti che questa definizione non è proprio ben data perché questo complesso non è neppure univocamente definito a meno di isomorfismo nella categoria omotopica, questo è solo uno dei primi esempi in cui per definire per bene gli oggetti che usiamo si dovrebbe inotrodurre una terza categoria di complessi che si chiama la categoria derivata, forse lo faremo più avanti.

Esercizio 8.5. C'è un analogo dei risultati dell'esercizio precedente per il prodotto tensore definendo $\overset{\mathrm{T}}{\otimes}$ e $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$. Definire questi funtori e formulare un analogo del risultato dell'esercizio precedente.

Esercizio 8.6. Sia A un dominio commutativo ad ideali principali. Si dimostri che per ogni coppia di A-moduli M, N si ha che $\operatorname{Ext}^i_A(M, N) = 0$ per $i \geqslant 2$.

Esercizio 8.7. Sia $M = \mathbb{C}[x]/(x)$. Si costruisca una risoluzione proiettiva e una iniettiva del $\mathbb{C}[x]$-modulo M.

Esercizio 8.8. Sia $M = \mathbb{C}[x, y]/(x, y)$. Si costruisca una risoluzione proiettiva del $\mathbb{C}[x, y]$-modulo M.

Esercizio 8.9. Si costruisca una risoluzione iniettiva del $\mathbb{C}[x, y]$-modulo M dell'esercizio precedente.

Esercizio 8.10. Sia K un campo e sia $\bar{K}$ la sua chiusura algebrica. Siano A e B due matrici a coefficienti in K. Si dimostri che A e B sono coniugate da una matrice a coefficienti in $\bar{K}$ se e solo se sono coniugate da una matrice a coefficienti in K. (esiste una dimostrazione diretta di poche righe se K è infinito e una un po' più lunga se K è finito. In questo secondo caso mi piacerebbe se esistesse una dimostrazione che utilizza quello che abbiamo fatto sulle K strutture e sulla comologia di $GL(n)$, l'unica che conosco però è più lunga e brutta di queste più dirette, però se a qualcuno venisse in mente qualcosa mi farebbe un regalo.)

Esercizio 8.11. Consideriamo l'azione per coniugio di $SL(n, \mathbb{F}_q)$ sulle matrici $n \times n$. In particolare questa azione preserva lo spazio delle matrici nilpotenti di rango $n-1$. Quante sono le sue orbite. Se si ha voglia generalizzare a matrici nilpotenti di forma di Jordan quasiasi.

Esercizio 8.12. Il gruppo $PGL(n, K)$ è uguale a $GL(n, K)/K^* Id$. Si dimostri che gli automorfismi dell'algebra delle matrici $n \times n$ è uguale a $PGL(n, K)$ che agisce sulle matrici per coniugio.

9. Esercizi decima settimana

Esercizio 9.1. Si dimostri che se A e A' sono due E algebre centrali semplici allora $A \otimes_E A'$ è una E-algebra centrale semplice.

Esercizio 9.2. Sia A una E algebra centrale semplice che si spezza su F. Si determini l'inverso di A in $\mathcal{A}_F$.

Esercizio 9.3. Si determini $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$.

Esercizio 9.4. Sia A una $\mathbb{C}$-algebra e sia V un A modulo irriducibile.

(1) se $\dim_{\mathbb{C}} V$ è finita allora $\operatorname{End}_A(V) = \mathbb{C}Id$;
(2) se $\dim_{\mathbb{C}} V$ è al più numerabile allora $\operatorname{End}_A(V) = \mathbb{C}Id$.

Esercizio 9.5. Una categoria abeliana si dice semisemplice se ogni sequenza esatta corta spezza. Si dimostri che in ogni categoria abeliana ogni complesso è omotopo ad un complesso nel quale tutte le mappe di bordo sono nulle e che tutti gli oggetti sono sia proiettivi che iniettivi.

Algebre di quaternioni. Sia E un campo di caratteristica diversa da 2 e siano $a, b \in E^*$. L'algebra $\mathbb{H}(a, b)$ è la E-algebra con base $1, i, j, k$ e prodotto E-bilineare definito dal fatto che 1 è l'unità di $\mathbb{H}(a, b)$ e dalle equazioni

$$ij = -ji = k \qquad i^2 = a \qquad j^2 = b \qquad ik = -ki = aj \qquad kj = -jk = bi \qquad k^2 = -ab.$$

Questo prodotto definisce una struttura di algebra associativa su $\mathbb{H}(a, b)$.

Esercizio 9.6. Si dimostri che se a è un quadrato allora $\mathbb{H}(a, b) \simeq \mathsf{Mat}_{2\times 2}(E)$. Se ne deduca che ogni tale algebra è semplice.

Esercizio 9.7. Si descriva un campo di spezzamento F per $\mathbb{H}(a, b)$ di grado 2 su E e sia $\Gamma = \operatorname{Gal}(F, E)$. Si calcolino gli elementi di $H^1(\Gamma, PGL(2, F))$ e l'elemento in $H^2(\Gamma, F^*)$ associati a $\mathbb{H}(a, b)$.

Esercizio 9.8. Si deduca dall'esercizio precedente che $\mathbb{H}(a, b) \simeq \mathsf{Mat}_{2\times 2}$ se e solo se la conica $ax^2 + by^2 - z^2 = 0$ ha soluzioni non banali in E. Si dimostri inoltre che se $\mathbb{H}(a, b)$ e $\mathbb{H}(a, c)$ sono isomorfe allora le forme quadratiche $ax^2 + by^2 - abz^2$ e $ax^2 + cy^2 - acz^2$ sono equivalenti.

Questi tre sercizi hanno sicuramente moltissimi modi di essere svolti, svolgendoli seguendo la traccia indicata sopra secondo me è un ottimo modo per rivedere in un esempio piccolo e nel quale e‘ possibile fare i calcoli esplicitamente quello che abbiamo fatto questa settimana.

Varietà di Severi-Brauer. I due esercizi che seguono prevedono la conoscenza dello spazio proiettivo e della grassmanniana, non solo come insiemi ma come varietà.

Sia $E \subset F$ una estensione finita di Galois congruppo di Galois Γ.

Il gruppo $PGL(n, F)$ non è solo il gruppo degli automorfismi delle matrici $n \times n$ ma anche dello spazio proiettivo $n-1$ dimensionale. C'è quindi una corrispondenza tra le E forme dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F})$ e $H^1(\Gamma, PGL(n, F))$.

Una varietà X definita su E si dice una varietà di Severi-Brauer se è una E forma di $\mathbb{P}^{n-1}(F)$ per qualche estensione di finita di Galois di E.

Esercizio 9.9. Classificare le forme reali di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e le forme reali di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Per quanto detto sopra c'è una corrispondenza tra le E-forme di $\mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$ e le E-forme di $\mathbb{P}^{n-1}(F)$. La corrispondenza è fatta così. Sia A una E-forma di $\mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$. Sia $Y = Gr(n, A)$ la E-varietà degli spazi n dimensionali in A e sia X la sottovarietà di Y le cui equazioni sono date da imporre le condizioni che il sottospazio n-dimensionale è un ideale di A. Allora X è una E-forma di $\mathbb{P}^{n-1}(F)$.

Esercizio 9.10. Esplicitare questa costruzione nei casi dell'esercizio precedente.

10. Esercizi undicesima settimana

Per giovedì 21 si devono consegnare i seguenti cinque esercizi.
E‘ obbligatorio fare il 9.7. E poi da ognuno dei seguenti gruppi uno a scelta.
8.6, 8.9,
8.10, 9.2, 9.3, 9.6, 9.8, 10.7, 10.8, 10.9
9.4, 9.5, 10.1
10.3, 10.4

Esercizio 10.1. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie abeliane e siano $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ due funtori con F aggiunto sinistro di G. Si dimostri che F conserva i limiti proiettivi e che, in particolare, è esatto a destra. Si dimostri inoltre che se G è esatto allora F manda proiettivi in proiettivi.

Esercizio 10.2. Sia Γ un gruppo di Galois conn la topologia definita a lezione. Sia M un gruppo abeliano sul quale agisce Γ e mettiamo su M la topologia discreta. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) l'azione $\Gamma \times M \longrightarrow M$ è continua;
(2) per ogni $m \in M$ la mappa $\gamma \mapsto \gamma(m)$ da Γ a M è continua;
(3) per ogni $m \in M$ lo stabilizzatore in Γ di m è un sottogruppo chiuso di indice finito;
(4) per ogni $m \in M$ lo stabilizzatore in Γ di m è un sottogruppo aperto;

Esercizio 10.3. Si dimostri che se $\Gamma = \mathrm{Gal}(F, E)$ è un gruppo di Galois con la topologia definita a lezione e M è un gruppo abeliano con la topologia discreta allora $\mathrm{Hom}_{cont}(\Gamma, M) = \varinjlim \mathrm{hom}(Gal(L, E)/M)$ dove il limite è preso sulle estensioni L di Galois finite di E contenute in F.

Si dimostri inoltre che se M è un Γ-modulo continuo (con M con la topologia discreta) allora $H^1_{cont}(\Gamma, M)$ definito come limite induttivo come abbiamo fatto a lezione è uguale a $Z^1_{cont}(\Gamma, M)/B^1_{cont}(\Gamma, M)$ con $Z^1 = \{f : \Gamma \longrightarrow M$ continue tale che etcetc $\}$ e B^1_{cont} definito come al solito (perché le mappe costruite come bordi sono nel caso di B^1 automaticamente continue).

(lo stesso risultato vale in generale)

Esercizio 10.4. Sia $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n$ dove dico che $n > m$ se m divide n e dove la mappa $\mathbb{Z}/(nm) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$ è la proiezione al quoziente. Osserviamo che abbiamo una mappa naturale da $\mathbb{Z}$ a $\hat{\mathbb{Z}}$.

(1) Si dimostri che 1 è un generatore ciclico di $\hat{\mathbb{Z}}$ ovvero che il sottogruppo generato da 1 è denso in $\hat{\mathbb{Z}}$.
(2) Si dimostri che $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{F}_q) = \hat{\mathbb{Z}}$.
(3) Si dimostri che se $\hat{\mathbb{Z}}$ agisce banalmente su $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ allora $H^1_{cont}(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
(4) Si dimostri che se $\hat{\mathbb{Z}}$ agisce banalmente su $\mathbb{Q}$ allora $H^1_{cont}(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}) = 0$

Alcune osservazioni di teoria di Galois. I due esercizi che seguono contengono alcune osservazioni probabilmente note ad alcune di voi. Si chiede di ridimostrarle utilizzando le informazioni comologiche ricavate nelle settimane passate

Esercizio 10.5 (Hilbert 90 moltiplicativo)**.** Sia E un campo di caratteristica p e si supponga che n sia un numero primo con p (se p diverso da zero) o che p sia zero. Si supponga inoltre che E contenga tutte le radici n-esime di 1. Sia $F \supset E$ una estensione di Galois con gruppo di Galois ciclico di ordine n. Si dimostri che esiste $a \in E$ tale che $F = E[\sqrt[n]{a}]$ utilizzando che $H^1(F^*) = 1$. (considerare il cociclo $[i] \mapsto \zeta_n^i$).

Esercizio 10.6 (Hilbert 90 additivo)**.** Sia p diverso da zero. Sia $F \supset E$ una estensione di Galois con gruppo di Galois di ordine p. Si dimostri che esiste $b \in E$ tale che $F = E[b]$ e $b^p - b \in E$.

(si usi $H^1(F) = 0$ che dimostreremo martedì)

Esercizio 10.7. Sia E un campo e sia D un corpo centrale su E di dimensione 4.

(1) Si dimostri che D si spezza su una estensione di grado 2 di E.
(2) si supponga che la caratteristica di E sia diversa da due. Si dimostri che $D \simeq \mathbb{H}(a, b)$ per opportuni a e b utilizzando l'esercizio 9.7.

Esercizio 10.8. Sia E il campo $\mathbb{F}_q((t))$ con q dispari e sia $a \in \mathbb{F}_q \smallsetminus \mathbb{F}_q^2$. Si dimostri che

$$E^*/(E^*)^2 \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

e che $1, \sqrt{a}, \sqrt{t}$ e $\sqrt{at}$ sono dei rappresentanti delle classi laterali.

Esercizio 10.9. Sia E il campo $\mathbb{F}_q((t))$ con $q = p^h$ dispari. Descrivere tutti i corpi centrali su E di dimensione 4.

Esercizio 10.10. Sia H un sottogruppo di G e sia M un H-modulo. Sia

$$\mathcal{V}_M = G \times M/H$$

dove h agisce sul prodotto nel seguente modo: $h \cdot (g, m)(gh^{-1}, hm)$. Abbiamo una proiezione $\pi : \mathcal{V}_M \longrightarrow G/H$ indotta da $(g, m) \mapsto g$. Si dimostri che

$$Ind_H^G(M) \simeq \{\sigma : G/H \longrightarrow \mathcal{V}_M \ : \ \pi\sigma = id\}.$$