

ESERCIZI MARTEDÌ 19 OTTOBRE

Esercizio 1. Calcolare l'inverso di $3 + 4i$.

Esercizio 2. Si calcolino le soluzioni dell'equazione $t^2 - 2it + 8 = 0$.

Esercizio 3. Se $z = x + iy$ si definisce \bar{z} , il *coniugato* di z come $\bar{z} = x - iy$. Si dimostri che

- (1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
- (2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

Esercizio 4. Sia $z = x + iy$, si calcoli $z \cdot \bar{z}$ e $z + \bar{z}$.

Esercizio 5. Si dimostri che ogni numero complesso risolve una equazione di secondo grado a coefficienti reali.

Esercizio 6. Calcolare l'inverso in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ di $3 + 2\sqrt{2}$.

Esercizio 7. Trovare due polinomi $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $a(x)(3x + 1) + b(x)(x^2 + 1) = 1$. Calcolare l'inverso di $1 + 3i$.

Esercizio 8. Calcolare il prodotto in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ di $1 + \sqrt[3]{2} + 2(\sqrt[3]{2})^2$ e $1 - \sqrt[3]{2}$.

* **Esercizio 9.** Calcolare l'inverso in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ di $1 + \sqrt[3]{2}$.

* **Esercizio 10.** (1) Dimostrare che \mathbb{R} può essere ordinato in un unico modo, ovvero esiste un'unica relazione $<$ su \mathbb{R} tale che

- (a) per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ diversi tra loro vale $x < y$ o $y < x$;
- (b) se $x < y$ allora $x + z < y + z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$;
- (c) se $0 < x$ e $0 < y$ allora $0 < xy$.

(2) Dimostrare che non esiste una relazione su \mathbb{C} con le stesse proprietà.

ESERCIZI LUNEDÌ 25 OTTOBRE

Esercizio 11. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione ed A un sottoinsieme di X . Dire quali delle seguenti inclusioni sono sempre vere e quali, invece, in certi casi sono false (per ogni inclusione vera scrivere una dimostrazione; per ogni inclusione falsa, portare un controesempio).

- i) $f^{-1}(f(A)) \supset A$,
- ii) $f^{-1}(f(A)) = A$,
- iii) $f(f^{-1}(f(A))) \subset f(A)$.

Esercizio 12.

- i) Si calcolino le coordinate polari del numero complesso $z = \sqrt{3} + i$.
- ii) Si calcoli il numero complesso che ha coordinate polari $\rho = 2$ e $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

Esercizio 13. Si definisca $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ per y un numero reale e, in generale, se $z = x + iy$ si definisca $e^z = e^x e^{iy}$.

Si dimostri che $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Esercizio 14. Si dimostri che z ha coordinate polari ρ, θ se e solo se $z = e^{\log \rho + i\theta}$.

Esercizio 15. Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ esiste sempre la radice quadrata di z (esiste w tale che $w^2 = z$).

Esercizio 16. Quante sono le radice n -esime di 1? w si dice una radice n -sima di 1 se $w^n = 1$.

Esercizio 17. Descrivere il luogo degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - i| < |z + i|$.

Esercizio 18. Descrivere il luogo degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z^2 - i| < |z^2 + i|$.

Esercizio 19. Se a, b, c, d sono numeri complessi distinti definiamo il birapporto di a, b, c, d nel seguente modo:

$$\text{birapp}(a, b, c, d) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

Dimostrare che

$$\text{birapp}(a, b, c, d) = \text{birapp}(b, a, d, c) = \text{birapp}(c, d, a, b) = \text{birapp}(d, c, b, a).$$

Esercizio 20.

- i) Descrivere l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\text{birapp}(z, 1, 2, 3)$ è un numero reale.
- ii) Descrivere l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\text{birapp}(z, 2i+1, 1, i)$ è un numero reale.

* **Esercizio 21.** Siano a, b, c numeri complessi distinti. Descrivere il luogo degli z tali che $\text{birapp}(z, a, b, c)$ è un numero reale.

1. ESERCIZI LUNEDÌ 8 NOVEMBRE 2010

Esercizio 22. Il Professor Marco Fiorenza a lezione ha dato la seguente dimostrazione che tutti i gatti sono bigi:

Primo passo: tutti i gatti hanno lo stesso colore. Per induzione sul numero dei gatti dimostriamo che n gatti hanno tutti lo stesso colore. Se $n = 1$ è vero. Se n gatti hanno lo stesso colore allora anche $n + 1$ gatti hanno lo stesso colore, infatti numeriamo i gatti con i numeri da 1 a $n + 1$. Per induzione quelli numerati da 1 a n hanno tutti lo stesso colore ovvero lo stesso colore del gatto con il numero 2. Analogamente per i gatti da 2 a $n + 1$. Quindi hanno tutti lo stesso colore.

Secondo passo: il gatto del Professor Domenico Manetti è bigio

Quindi tutti i gatti sono bigi.

... eppure qualche dubbio rimane...

Esercizio 23. Sia X un insieme e siano A_1, \dots, A_n dei sottoinsiemi di X . Dimostrare che

$$X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) = (X \setminus A_1) \cap \dots \cap (X \setminus A_n).$$

Esercizio 24. Siano X un insieme ed f e $g : X \rightarrow X$ due applicazioni da X in X . Ricordiamo che la composizione di f e g è l'applicazione $f \circ g : X \rightarrow X$ tale che $(f \circ g)(x) := f(g(x))$, per ogni $x \in X$ ("prima facciamo g e poi facciamo f ").

- i) Dimostrare che se f e g commutano, ovvero $f \circ g = g \circ f$, allora anche i loro quadrati $f^2 := f \circ f$ e $g^2 := g \circ g$ commutano.
- ii) È possibile trovare applicazioni f e g che non commutano, ma i cui quadrati commutano?

Esercizio 25. Dire quali dei seguenti insiemi è un sottospazio.

- i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{k}^3 : x + y + z = 0\}$;
- ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1\}$;
- iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$;
- iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

Esercizio 26. Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{C}^n .

- i) Dire per quali sottospazi W il complementare $\mathbb{C}^n \setminus W$ è a sua volta un sottospazio.
- ii) Dire per quali sottospazi W l'insieme $(\mathbb{C}^n \setminus W) \cup \{0\}$ è a sua volta un sottospazio.

* **Esercizio 27.** Siano V_1, \dots, V_n dei sottospazi vettoriali di \mathbb{C}^n .

- i) se $V_1 \cup V_2$ è un sottospazio vettoriale allora $V_1 \supset V_2$ o $V_2 \supset V_1$;
- ii) se $V_1 \cup \dots \cup V_n$ è un sottospazio vettoriale allora esiste i tale che $V_i \supset V_j$ per ogni j .

Esercizio 28. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 , siano dati i seguenti vettori:

$$v_1 = (1, 2, 3) \quad v_2 = (3, 5, 7) \quad v_3 = (2, 3, 5) \quad v_4 = (-1, -1, -2).$$

- i) I vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti? Generano \mathbb{R}^3 ?
- ii) Quali sottoinsiemi dell'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono una base di \mathbb{R}^3 ?

iii) Scegliere una base e scrivere il vettore $v = (1, 1, 0)$ nella base.

Esercizio 29. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in \mathbb{C} . Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $L : M \rightarrow M$ definito da $L(B) = AB - BA$

- (1) dimostrare che L è una applicazione lineare;
- (2) scegliere una base di M e scrivere la matrice associata a L rispetto a questa base;
- (3) descrivere il nucleo L .

Esercizio 30. Sia X un insieme ed A un sottoinsieme finito di X .

- i) Si dimostri che l'insieme $V = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}\}$ (delle funzioni da X in \mathbb{C}) è uno spazio vettoriale.
- ii) Si dimostri che l'insieme $\{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f(a) = 0 \forall a \in A\}$ (delle funzioni da X in \mathbb{C} che si annullano su A) è un sottospazio vettoriale di V .
- iii) L'insieme delle funzioni $\{f \in V \mid \sum_{a \in A} f(a) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V ?
- iv) L'insieme delle funzioni $\{f \in V \mid \prod_{a \in A} f(a) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale V ?

Esercizio 31. Sia $V = \mathbb{k}[x]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in \mathbb{k} di grado minore o uguale a n .

Siano $p_0, p_1, \dots, p_n \in V$ polinomi non nulli con grado di p_i uguale a i per $i = 0, \dots, n$. Dimostrare che sono una base di V

LUNEDÌ 29 NOVEMBRE 2010

Esercizio 32. Si calcoli l'inversa delle seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 33. Sia $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata (rispetto alla base canonica)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siano $v_1 = (2, 1, 1)$, $v_2 = (3, 4, 1)$ e $v_3 = (1, 4, 0)$ tre vettori di \mathbb{R}^3 .

- i) si verifichi che v_1, v_2, v_3 sono una base di \mathbb{R}^3 ;
- ii) si scriva la matrice associata ad L rispetto alla base v_1, v_2, v_3 .

Esercizio 34. Si considerino le seguenti matrici 2×2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si dica quali di queste sono associate ad una simmetria di \mathbb{R}^2 e in caso lo siano si scriva l'equazione della retta di simmetria.

Esercizio 35. Sia $Z = \{A \in \text{Mat}_{n \times n} : AB = BA \text{ per ogni } B \in \text{Mat}_{n \times n}\}$. Dimostrare che Z è un sottospazio vettoriale di $\text{Mat}_{n \times n}$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 36. Siano U, V, W tre spazi vettoriali sul campo \mathbb{k} . Si dimostri che

$$\text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, V \oplus W) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, V) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W).$$

Esercizio 37. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{k}[x]_{\leq 5}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 5 a coefficienti in \mathbb{k} si considerino i sottospazi

$$U = \{p(x) \in V : \text{il grado di } p \text{ sia minore o uguale a } 2\};$$

$$W = \{p(x) \in V : p(0) = p(1) = p(2) = 0\}.$$

Si mostri che $V = U \oplus W$ ovvero che $U \cap W = \{0\}$ e che $U + W = V$.

Esercizio 38. Si calcoli l'inversa della seguente matrice a coefficienti funzioni razionali (quozienti di polinomi) nella variabile t :

$$\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ \frac{1}{t^2+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 39. Sia $V = \mathbb{k}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in \mathbb{k} nella variabile x . Si considerino le due applicazioni lineari $F, G : V \rightarrow V$ definite da

$$F(p(x)) = xp(x) \quad \text{and} \quad G(p(x)) = \frac{p(x) - p(0)}{x}.$$

Si dimostri che i) F e G sono lineari, ii) $G \circ F = id$ e si calcoli $F \circ G$. Commenti..

2. ESERCIZI LUNEDÌ 6 DICEMBRE

Esercizio 40. Per ogni A matrice $m \times n$ e per ogni B matrice $n \times m$, dimostrare che:

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Esercizio 41. Sia $V = \mathbb{k}[x]_{\leq 3}$. Si consideri la base di V data da $v_1 = x + 1$, $v_2 = x + 2$, $v_3 = x^2 + 1$, $v_4 = x^3 + 1$. Scrivere la matrice del cambiamento di base che esprime le coordinate nella base usuale $1, x, x^2, x^3$ rispetto alla base v_i , ovvero la matrice che trasforma le coordinate rispetto alla base v_i nelle coordinate rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$. Sia $L : V \rightarrow V$ l'applicazione lineare definita da $L(f(x)) = xf'(x) + f(x)$. Si scriva la matrice associata a L rispetto alla base v_i in partenza e $1, x, x^2, x^3$ in arrivo.

Esercizio 42. i) Siano V uno spazio vettoriale su \mathbb{k} con base \mathbf{v} : v_1, v_2, v_3 . Sia \mathbf{v}' la base $v'_1 = v_1 + v_2$, $v'_2 = -v_2$, $v'_3 = -v_1 - v_2 + v_3$. Sia $u = xv'_1 + yv'_2 + zv'_3$, scrivere u nella base \mathbf{v} . Dedurre la matrice del cambiamento di coordinate, ovvero la matrice che trasforma le coordinate rispetto alla base \mathbf{v}' nelle coordinate rispetto alla base \mathbf{v} .

ii) Sia W uno spazio vettoriale su \mathbb{k} con base \mathbf{w} : w_1, w_2 . Sia \mathbf{w}' la base $w'_1 = w_1 + w_2$, $w'_2 = 2w_1 + w_2$. Sia $w = xw'_1 + yw'_2$, scrivere w nella base \mathbf{w} . Dedurre la matrice del cambiamento di coordinate, ovvero la matrice che trasforma le coordinate rispetto alla base \mathbf{w}' nelle coordinate rispetto alla base \mathbf{w} .

iii) Sia $L : V \rightarrow W$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alle basi \mathbf{v} e \mathbf{w} la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si scriva:

- a) La matrice associata a L rispetto alle basi \mathbf{v} e \mathbf{w}' ;
- b) La matrice associata a L rispetto alle basi \mathbf{v}' e \mathbf{w} ;
- c) La matrice associata a L rispetto alle basi \mathbf{v}' e \mathbf{w}' .

Esercizio 43. Siano U, V due spazi vettoriali sul campo \mathbb{k} , sia $W = U \oplus V$ e $\pi_U : W \rightarrow U$, $\pi_V : W \rightarrow V$ le due proiezioni: $\pi_U(u, v) = u$ e $\pi_V(u, v) = v$. Si dimostri che per ogni spazio vettoriale Z e per ogni coppia di applicazioni lineari $f : Z \rightarrow U$, $g : Z \rightarrow V$ esiste ed è unica $h : Z \rightarrow W$ tale che $f = \pi_U \circ h$ e $g = \pi_V \circ h$.

Esercizio 44. Ricordiamo che i numeri di Fibonacci sono definiti nel seguente modo $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ e $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ per $i \geq 1$. Si considerino i vettori di \mathbb{R}^5 definiti nel modo seguente: $v_i = (1, F_i, F_i^2, F_i^3, F_i^4)$ per $i = 1, \dots, 5$. È noto che i vettori v_1, \dots, v_5 sono una base di \mathbb{R}^5 detta la base di Fibonacci-Vandermonde.

Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ la cui matrice associata nella base canonica è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si scriva la matrice associata ad L rispetto alla base di Fibonacci-Vandermonde.

Esercizio 45. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $L : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $L^2 = id$. Sia $U = \ker(L + id)$ e $W = \ker(L - id)$ si dimostri che $V = U \oplus W$.

ESERCIZI LUNEDÌ 13 DICEMBRE

Esercizio 46. Sia $V = \mathbb{k}^3$ e sia V^* lo spazio vettoriale duale. Si consideri la base $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 1, 3)$. Si calcoli la base duale.

Esercizio 47. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Sia $L^t : W^* \longrightarrow V^*$ l'applicazione trasposta. Si dimostri che L è surgettiva se e solo se L^t è iniettiva.

Esercizio 48. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare di rango r (ovvero la dimensione dell'immagine uguale a r). Dimostrare che esiste una base di V e una base di W tale che la matrice associata a L in questa base ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

ha tutte le entrate fuori della diagonale (gli elementi della matrice di coordinate i, i) nulle, le prime r entrate sulla diagonale sono uguali a 1 e le rimanenti sono uguali a 0.

Esercizio 49. Scrivere una equazione parametrica e cartesiana del piano in \mathbb{k}^3 passante per i punti $(1, 1, 0)$, $(3, -2, 1)$, $(0, 5, -3)$.

Esercizio 50. Determinare il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 51. Sia V uno spazio vettoriale e U, W due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$. Dimostrare che $V^* = \text{ann}(U) \oplus \text{ann}(W)$, dove se Z è un sottospazio di V definiamo $\text{ann}(Z) = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in Z\}$.

ESERCIZI LUNEDÌ 10 GENNAIO

Esercizio 52. Determinare tutte le matrici A , $n \times n$ a coefficienti reali tali che $AA^t = I$.

Esercizio 53. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi di polinomio caratteristico $p(t) = t^n - 1$. Si dimostri che è diagonalizzabile.

Esercizio 54. Sia A una matrice invertibile $n \times n$ a coefficienti interi. Mostrare che la matrice inversa di A a coefficienti interi se e soltanto se $\det(A) = \pm 1$.

Esercizio 55. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino: il polinomio caratteristico, gli autovalori, gli autovettori e diagonalizzare la matrice. È sempre vero che le matrici antidiagonali sono diagonalizzabili?

Esercizio 56. Sia V uno spazio vettoriale ed $A, B : V \rightarrow V$ due applicazioni lineari. Denotiamo con $Bil(V \times V, \mathbb{k})$ l'insieme delle applicazioni bilineari definite su $V \times V$ in \mathbb{k} . Definiamo l'applicazione

$$C : Bil(V \times V, \mathbb{k}) \rightarrow Bil(V \times V, \mathbb{k})$$

che ad ogni elemento $b \in Bil(V \times V, \mathbb{k})$ associa $C(b)(v_1, v_2) = b(Av_1, Bv_2)$.

- (1) Dimostrare che C è ben definita e lineare;
- (2) (più difficile) Sapendo che la traccia di A è uguale a 1 e la traccia di B è uguale a 2 calcolare la traccia di C .

ESERCIZI LUNEDÌ 17 GENNAIO

Esercizio 57. Si determinino gli autospazi generalizzati della applicazione lineare $L : \mathbb{k}^4 \rightarrow \mathbb{k}^4$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 58. Sia A la matrice 2011×2011 che ha tutte le entrate uguali ad 1. Si dica se è diagonalizzabile e se ne calcoli il polinomio caratteristico.

Esercizio 59. Sia V uno spazio vettoriale e $A, B, C : V \rightarrow V$ tre applicazioni lineari con C invertibile e $A = CBC^{-1}$. Si dimostri che se V_λ è l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ di B allora $C(V_\lambda)$ è l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ di A .

Esercizio 60. Sia V lo spazio vettoriale delle applicazioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} che sono differenziabili un numero infinito di volte. Sia $D, E : V \rightarrow V$ le applicazioni definite da $D(f) = f'$ (la derivata di f) e $E(f) = e^t \cdot f$ (la moltiplicazione per la funzione esponenziale e^t).

- (1) Si calcoli l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 0.
- (2) Si mostri $EDE^{-1} = D - Id$.
- (3) Si calcoli l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 1.

Esercizio 61. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} di dimensione 4 e sia $L : V \rightarrow V$ una applicazione lineare tale che $L + \lambda L$ è surgettiva per ogni numero complesso λ diverso da 0. Si calcoli il polinomio caratteristico di L .

Esercizio 62. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia L un'applicazione lineare di V in V . Sia $L^3 - 2L^2 + L = 0$ e sia 1 la molteplicità geometrica degli autovalori 1 e 0. Si calcoli il polinomio caratteristico di L .

Esercizio 63. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e sia L un'applicazione lineare di V in V tale che $L^7 = 0$. Si dimostri che $L^5 = 0$.

Esercizio 64. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita n e A una applicazione lineare di V in V . Si dimostri che $Tr(A^m) = 0$ per $m = 1, 2, \dots, n$ se e solo se A è nilpotente (cioè che $A^n = 0$).

Esercizio 65. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita e $A, B : V \rightarrow V$ due applicazioni lineari. Si supponga che $AB - BA = B$. Si mostri che B è nilpotente.

Esercizio 66. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $W = L(V, V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a V . Sia $A \in W$ e siano $T_A : W \rightarrow W$ definite da $T_A(X) = AX$. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è uguale a $t^2(t - 1)$ si calcoli il polinomio caratteristico di T_A . Se V_0 e V_1 sono gli autospazi generalizzati di A si descrivano gli autospazi generalizzati di T_A . Si dimostri inoltre che se A è diagonalizzabile allora lo è anche T_A e che se A è nilpotente lo è anche T_A .

Esercizio 67. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 3 e sia $W = L(V, V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a V . Sia $A \in W$ e siano $S_A : W \rightarrow W$ definite da $S_A(X) = AX - XA$. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è uguale a $t^2(t - 1)$ si calcoli il polinomio caratteristico di S_A . Se V_0 e V_1 sono gli autospazi generalizzati di A si mostri che gli autospazi generalizzati di A sono

$$H_{00} = \{X \in W : X(V_0) \subset V_0 \text{ e } X(V_1) \subset V_1\}$$

$$H_{10} = \{X \in W : X(V_0) \subset V_1 \text{ e } X(V_1) = 0\}$$

$$H_{01} = \{X \in W : X(V_1) \subset V_0 \text{ e } X(V_0) = 0\}.$$

Si dimostri che se A è diagonalizzabile allora lo è anche S_A e che se A è nilpotente lo è anche S_A .

