

Progetto Lauree Scientifiche

La Matematica delle Olimpiadi

PROBLEMI DI
COMBINATORIA:
COMMENTI E SOLUZIONI
6 febbraio 2009

ALESSANDRO D'ANDREA
M. CRISTINA IPSEVICH
ANDREA MAFFEI

1. Il principio dei cassetti (1)

Molti problemi combinatori possono essere affrontati con la seguente semplicissima osservazione:

Principio dei cassetti. Se disponiamo m oggetti in n cassetti, ed $m > n$, allora almeno un cassetto conterrà più di un oggetto.

Questo principio ha molte versioni, più o meno equivalenti. Ne enunciamo due che saranno utili in seguito:

- Se disponiamo m oggetti in n cassetti, ed $m > kn$, allora almeno un cassetto conterrà più di k oggetti.
- Un'applicazione tra insiemi con lo stesso numero di elementi è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Esercizio 1 *Mostrare che comunque siano scelti 51 numeri interi distinti compresi tra 1 e 100, è possibile trovarne due la cui somma sia 101.*

Soluzione: I 100 numeri considerati possono essere ripartiti in 50 coppie disgiunte che hanno somma 101: (1, 100), (2, 99), ecc...: tali coppie costituiscono i nostri 50 cassetti. Se abbiamo 51 numeri distinti, almeno due dovranno cadere nello stesso cassetto: tali due numeri avranno quindi somma 101. \square

Esercizio 2 *Ad una festa, le persone che vengono presentate si stringono la mano. Mostrare che alla fine della festa almeno in due hanno stretto la mano allo stesso numero di persone.*

Soluzione: Supponiamo innanzitutto che ogni partecipante alla festa abbia stretto la mano ad almeno una persona. Se n persone hanno partecipato alla festa, il numero di mani strette da ciascuno è un intero compreso tra 1 ed $n-1$. Poiché il numero n dei partecipanti è superiore ai possibili numeri di mani strette, almeno due partecipanti avranno stretto lo stesso numero di mani. Inoltre, se più di una persona non ha stretto nessuna mano, allora tali persone hanno stretto la mano allo stesso numero (zero) di persone.

L'ultimo caso da considerare è quello in cui esattamente una persona non ha stretto mani. Ma allora escludendo tale persona dagli invitati, otteniamo una festa (con un invitato in meno) nella quale tutti hanno stretto la mano ad almeno una persona, e ricadiamo nel caso inizialmente considerato. \square

Esercizio 3 *Se dividiamo l'età di Andrea per 7 si ottiene 3 come resto, mentre se la dividiamo per 8 si ottiene 6. Sapendo che Andrea non ha ancora l'età per andare in pensione, quanti anni ha?*

Soluzione: Innanzitutto osserviamo che 38 risolve il problema. Il resto di 38 nella divisione per 7 è 3, e nella divisione per 8 è 6. Supponiamo che anche il numero n risolva il problema: allora $n-38$ è divisibile sia per 7 che per 8, ed è quindi divisibile per 56. In altre parole, ogni altra soluzione al problema differisce da 38 per un multiplo di 56.

Poiché le età sono numeri positivi, le possibili soluzioni sono $38, 94 = 38 + 56, 150 = 38 + 2 \cdot 56$, ecc... Sapendo che Andrea non ha ancora raggiunto l'età pensionabile, l'unica risposta lecita è proprio 38. \square

Ci si può chiedere se l'Esercizio 3 ammetta soluzione comunque vengano scelti i resti delle due divisioni: la risposta a questa domanda è il contenuto del *Teorema cinese del resto*.

Teorema. Se a e b sono interi positivi primi tra loro, allora per ogni scelta di interi $0 \leq r_a < a$, $0 \leq r_b < b$ esiste un intero x tale che i resti delle divisioni di x per a e b siano rispettivamente r_a ed r_b .

Dimostrazione: Consideriamo tutti gli ab numeri interi compresi tra 0 e $ab - 1$, e di ciascuno di essi calcoliamo la corrispondente coppia di resti (r_a, r_b) . Ragionando come sopra, si vede facilmente che se due numeri forniscono gli stessi resti, devono differire di un multiplo di ab : poiché abbiamo considerato solo numeri compresi tra 0 e $ab - 1$, questo non potrà mai succedere.

Ma allora i nostri ab numeri forniscono coppie di resti tutte distinte. Poiché le possibili coppie di resti sono anch'esse ab , l'applicazione che associa a ciascun numero la sua coppia di resti è un'applicazione iniettiva tra insiemi della stessa cardinalità. Essa deve quindi essere anche suriettiva. \square

2. Il principio dei cassetti (2)

Esercizio 4 *Mostrare che l'espansione decimale di un numero razionale è finita o periodica.*

Soluzione: Possiamo ottenere l'espansione decimale del numero razionale a/b – supponiamo per semplicità che a e b siano entrambi positivi, e che $a < b$ – effettuando l'usuale algoritmo di divisione. Nel caso tale algoritmo abbia termine, l'espansione decimale di a/b è finita.

Se invece l'algoritmo non termina, i resti che otteniamo ad ogni passaggio sono numeri interi compresi tra 1 e $b - 1$. Dopo i primi b passi, per il principio dei cassetti uno dei resti sarà stato ottenuto più di una volta. L'esecuzione dell'algoritmo a partire da tali due resti è allora la stessa, così come anche le cifre ottenute nel corso della divisione. \square

Esercizio 5 *Consideriamo una sequenza formata da $n^2 + 1$ numeri distinti. Dimostrare che esiste una sottosequenza ordinata (cioè crescente o decrescente) formata da $n + 1$ numeri.*

Soluzione: Supponiamo che non esistano sottosequenze lunghe $n + 1$ monotone crescenti. Fissiamo un elemento a_i e consideriamo l'insieme delle sottosequenze crescenti aventi a_i come primo elemento: sia l la massima lunghezza di tali sottosequenze. Naturalmente avremo che $l \leq n$. Indichiamo con $F(l)$ il numero degli elementi a_i aventi l come massima lunghezza: naturalmente si deve avere, per il principio dei cassetti, che esiste un numero l^* tale che $F(l^*) \geq n + 1$ e questo ci dice che troviamo $n + 1$ elementi che sono iniziali per sequenze crescenti lunghe l^* . Questo significa che questi $n + 1$ elementi formano una sequenza monotona decrescente. \square

Esercizio 6 *In un quadrato 8×8 sono rimossi due quadratini d'angolo opposti. E' possibile ricoprire il quadrato con 31 rettangoli 2×1 ?*

Soluzione: Colorando i quadratini come in una normale scacchiera, si vede che i due angoli rimossi hanno lo stesso colore. D'altro canto, ogni rettangolo 2×1 ricopre la stessa quantità di bianco e di nero. E' quindi impossibile ricoprire la scacchiera come desiderato. \square

3. Grafi

Il concetto di grafo è utile per trattare in modo chiaro molti problemi che prendono spunto da situazioni reali. In generale in questa discussione un *grafo* è un insieme di punti, detti *vertici*, collegati fra loro da archi detti *lati*. Ogni coppia di vertici distinti può essere collegata da al più un lato. I vertici di un grafo possono per esempio rappresentare delle città e i lati del grafo le strade che le congiungono. Oppure i vertici possono rappresentare delle persone e i lati i legami di amicizia tra queste persone.

Un *cammino* di un grafo è una successione di vertici ognuno collegato al successivo da un lato. Un cammino si dice *chiuso* se inizia e finisce in uno stesso vertice.

Un grafo si dice *connesso* se per ogni coppia di vertici distinti esiste un cammino che li collega. La *valenza* di un vertice è il numero di lati che lo contengono.

Esercizio 7 *Un grafo possiede 12 lati, e ogni vertice ha valenza 4. Quanti vertici ha il grafo?*

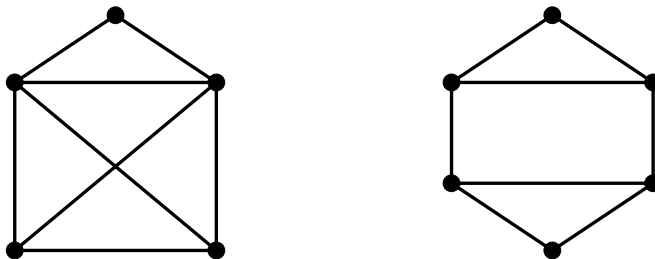
Soluzione: Ad ogni lato del grafo possiamo associare i due vertici che collega; viceversa ad ogni vertice a del grafo possiamo associare i lati che contengono a . Il numero di questi lati si chiama la valenza del vertice e la indichiamo con v_a . Abbiamo quindi la seguente formula

$$2 \text{ card}\{\text{lati}\} = \sum_{a \text{ vertice}} v_a. \quad (1)$$

In particolare per il grafo in questione otteniamo $24 = 4 \text{ card}\{\text{vertici}\}$, ovvero il grafo ha 6 vertici. \square

Un grafo con queste caratteristiche è costituito dai vertici e dai lati dell'ottaedro regolare.

Esercizio 8 *E' possibile tracciare queste figure senza mai staccare la penna dal foglio e senza disegnare lo stesso lato due volte?*



Soluzione: La prima figura si può disegnare come richiesto: si può partire in basso a sinistra percorrere tutto il perimetro esterno fino a tornare nello stesso angolo, percorrere una diagonale, poi il lato sopra le due diagonali e infine l'ultima diagonale.

La seconda figura invece non si può disegnare come richiesto. Infatti se percorro la figura senza mai staccare la penna dal foglio, a parte eventualmente il punto iniziale e il punto finale tutti gli altri vertici devono avere valenza pari. Infatti per ogni lato che disegno e che finisce in quel vertice ne corrisponderà uno che parte da quel vertice. Quindi una figura che si può disegnare in questo modo deve avere al più 2 vertici di valenza dispari mentre la figura in questione ne ha 4. \square

Definizione. Un grafo si dice *percorribile* se esiste un cammino che passa per ogni lato una e una sola volta.

Il ragionamento utilizzato per mostrare che la seconda figura non si può disegnare senza mai staccare la penna dal foglio mostra una delle due implicazioni del seguente Teorema.

Teorema. *Un grafo connesso è percorribile se e solo se esistono al più due vertici di valenza dispari*

Dimostrazione: Rimane da mostrare che se un grafo è connesso e ha al più due vertici di valenza dispari allora è effettivamente percorribile. La dimostrazione non è difficile e può essere fatta per induzione sul numero di lati del grafo. Scegliamo un vertice di valenza dispari od un qualsiasi vertice di valenza pari se un vertice di valenza dispari non esiste. Iniziamo a percorrere un lato qualsiasi che parte da questo vertice. Consideriamo quindi il grafo che si ottiene rimuovendo questo lato (ed eventualmente il vertice di partenza se si trattava dell'unico lato che partiva da quel vertice). Il grafo così ottenuto verifica le ipotesi del teorema (come mai?) ma ha un lato di meno e quindi possiamo concludere per induzione. \square

Esercizio 9 *In un grafo con n vertici, ogni vertice è collegato con almeno $n/2$ vertici. Mostrare che il grafo è connesso.*

Soluzione: Mostriamo che per ogni coppia di vertici esiste un cammino costituito da al più due lati che li collega. Se a è un vertice definiamo l'insieme degli amici di a nel seguente modo

$$\text{Amici}(a) = \{v \text{ vertice collegato ad } a \text{ da un lato}\}. \quad (2)$$

Siano adesso a e b due vertici distinti. Se $a \in \text{Amici}(b)$ allora i due vertici sono collegati da un lato. Se $a \notin \text{Amici}(b)$ allora $\text{Amici}(a)$ e $\text{Amici}(b)$ sono due sottoinsiemi di almeno $n/2$ elementi dell'insieme

dei vertici diversi da a e b . Quest'ultimo insieme ha $n - 2$ elementi, quindi per il principio dei cassetti $Amici(a)$ e $Amici(b)$ devono avere almeno un elemento in comune, ovvero esiste un vertice collegato da un lato sia ad a che a b e quindi esiste un cammino di due lati che collega a e b . \square

Possiamo riformulare questa soluzione nel seguente modo: in un paese ogni abitante conosce almeno la metà dei suoi concittadini, allora due qualsiasi abitanti o si conoscono o hanno almeno un amico in comune.

Definizione. Un grafo si dice visitabile se esiste un cammino chiuso (ovvero che inizia e finisce nello stesso vertice) che passa una e una sola volta per ogni vertice.

Per i cammini visitabili non esiste un criterio semplice come per i cammini percorribili. Esistono però delle condizioni che assicurano che un cammino sia visitabile. Per esempio le ipotesi dell'esercizio assicurano che un grafo sia visitabile.

Teorema. Se in un grafo con n vertici, ogni vertice è collegato con almeno $n/2$ vertici, allora il grafo è visitabile.

Dimostrazione: Procediamo per assurdo. Tra tutti grafi i con n vertici non visitabili e tali che ogni vertice è collegato con almeno $n/2$ vertici, ne scegliamo uno con numero di lati massimo. Siano a e b due vertici distinti del grafo non collegati da un lato (se il grafo avesse tutti i possibili lati sarebbe ovviamente visitabile). Se aggiungiamo al grafo il lato ℓ che collega a e b otteniamo un grafo che ha un numero di lati maggiore del grafo di partenza, con n vertici e tale che ogni vertice è collegato con almeno $n/2$ vertici. Quindi il grafo così ottenuto è visitabile e possiamo scegliere un cammino chiuso che passa per ogni vertice. Tale cammino dovrà contenere per forza di cose il lato ℓ . Partendo quindi dal vertice a e percorrendo per ultimo il lato ℓ siano

$$a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b, a$$

la successione dei vertici del cammino. Sia adesso $B = Amici(b) \setminus \{a\}$ e sia

$$C = \{x_i \text{ tali che } x_{i+1} \in Amici(a)\} \setminus \{a\}$$

Per il principio dei cassetti B e C hanno almeno un elemento x_i in comune. La successione di vertici

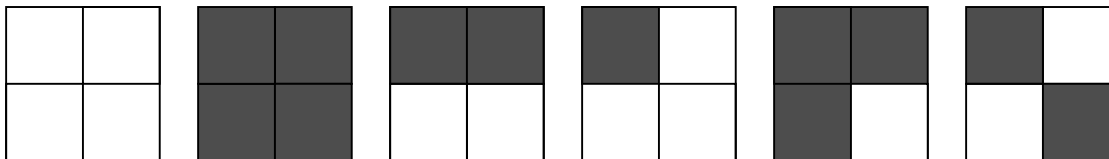
$$a = x_1, x_2, \dots, x_i, b = x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{i+1}, a$$

è quindi un cammino chiuso che visita tutti i vertici e che non contiene il lato ℓ che abbiamo aggiunto. \square

Esercizio 10 Le caselle di una scacchiera 8×8 sono colorate di bianco o di nero, ma non nella maniera usuale: la colonna di sinistra è tutta nera, mentre quella di destra è tutta bianca, mentre non vi è apparente regolarità nella colorazione delle caselle interne. L'insetto Zebrix si sposta soltanto lungo lati che dividono una casella bianca da una nera. Mostrare che Zebrix è sempre in grado, partendo dal lato inferiore della scacchiera, di raggiungere quello superiore.

Soluzione: Consideriamo il grafo che ha come vertici i vertici delle caselle della scacchiera e come lati i lati delle caselle che dividono una casella bianca da una nera. Il problema si può quindi riformulare nel seguente modo. Mostrare che esiste un cammino che ha un vertice sul bordo inferiore della scacchiera e uno sul bordo superiore.

A meno di rotazioni per i vertici interni alla scacchiera sono possibili solo le seguenti sei situazioni.



Nel primo caso e nel secondo caso la valenza del vertice è 0, nel terzo, nel quarto e nel quinto caso la valenza del vertice è 2 mentre nel sesto è 4. Quindi tutti i vertici interni hanno valenza pari. Per i vertici sul bordo esterno della scacchiera sono invece possibili le seguenti tre situazioni.



Nel primo e nel secondo caso la valenza del vertice è 0 mentre nel terzo è 1. Osserviamo inoltre che poiché la prima casella a sinistra è nera e l'ultima a destra è bianca dobbiamo avere un numero dispari di passaggi da caselle bianche a caselle nere in ogni riga quindi il numero di vertici con valenza 1 sul bordo inferiore (o analogamente sul superiore) è dispari.

Per ogni vertice a di valenza 1 sul bordo inferiore della scacchiera consideriamo l'insieme $C(a)$ costituito da a e dai vertici che si possono raggiungere con un cammino che parte a . Se $C(a)$ contiene un vertice del bordo superiore abbiamo finito. Se invece $C(a)$ non contiene un tale vertice osserviamo, che per la formula (1) e per il fatto che tutti i vertici interni hanno valenza pari, $C(a)$ contiene un numero pari di vertici sul bordo inferiore. Inoltre è chiaro che se $a' \in C(a)$ allora $C(a') = C(a)$ quindi l'insieme dei vertici sul bordo inferiore viene suddiviso in sottoinsiemi disgiunti dai vari $C(a)$. Almeno uno di questi sottoinsiemi deve quindi avere cardinalità dispari. Un vertice in questo sottoinsieme è quindi collegato con un cammino al bordo superiore. \square

4. Disposizioni e combinazioni (1)

Esercizio 11 *Il ministero delle finanze ha deciso di assegnare ad tutti i cittadini italiani dei codici alfanumerici, tutti della stessa lunghezza, che li identifichino univocamente. Nell'attuale periodo di crisi, ci si propone di utilizzare codici che siano i più brevi possibile. Qual è la minima lunghezza che devono avere?*

Soluzione: Se utilizziamo le 26 lettere dell'alfabeto inglese, assieme alle 10 cifre, abbiamo a disposizione 36 simboli per creare i codici alfanumerici. Le parole di lunghezza k da un alfabeto di 36 simboli sono in totale 36^k : il problema si riduce a trovare il minimo valore di k tale che 36^k ecceda il numero di cittadini italiani. Dal momento che $36^5 = 60.466.176$ e $36^6 = 2.176.782.336$, codici di cinque cifre sono sufficienti per coprire l'intera popolazione italiana, che è inferiore ai sessanta milioni (nel 2007 l'Istat riporta 59.131.287). Un governo non sprovveduto utilizzerà comunque codici di sei cifre per evitare di dover cambiare nuovamente sistema dopo pochi anni. \square

Esercizio 12 *Alcuni recenti scavi archeologici effettuati vicino Tarquinia hanno portato alla luce un avanzato sistema di identificazione in vigore tra gli antichi Etruschi. Ogni persona era munita di un pendaglio sul quale erano raffigurate cinque tra le dodici costellazioni dello Zodiaco. Non è chiaro se l'ordine nel quale le costellazioni erano raffigurate avesse un ruolo nell'identificazione delle persone. Calcolare il numero totale di codici possibili sia nel caso in cui l'ordine fosse rilevante, sia nel caso non lo fosse.*

Soluzione: Se l'ordine non è rilevante, i possibili sottoinsiemi di 5 simboli da un insieme di 12 sono esattamente

$$\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792.$$

Se invece l'ordine è importante, bisogna moltiplicare ciascuna delle combinazioni per il numero delle permutazioni su 5 elementi, che è $5! = 120$. Il valore che si ottiene è $120 \cdot 792 = 95.040$. \square

Esercizio 13 *Tredici persone si siedono a cena attorno ad un tavolo rotondo. Quante disposizioni sono possibili, a meno di ruotare il tavolo?*

Soluzione: Ruotando il tavolo fino a mettere il padrone di casa verso Nord, è sufficiente contare il numero di possibili disposizioni dei restanti 12 commensali sulle restanti 12 sedie. Queste sono precisamente $12! = 479.001.600$. \square

5. Disposizioni e combinazioni (2)

Esercizio 14 *Quante sono le somme di 5 numeri interi positivi che danno come risultato 10?*

Soluzione: Ci stiamo chiedendo in quanti modi possiamo scegliere degli interi positivi x_1, x_2, \dots, x_5 tali che $x_1 + \dots + x_5 = 10$. Invece di considerare la sequenza x_1, \dots, x_5 consideriamo la sequenza y_1, \dots, y_5 in cui $y_1 = x_1, y_2 = x_1 + x_2, y_3 = x_1 + x_2 + x_3, \dots$ Quindi abbiamo una successione di numeri interi

$$0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 = 10.$$

D'altronde dati $0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < 10$ possiamo facilmente ricostruire i valori di x_1, \dots, x_5 . Dobbiamo quindi contare le possibili scelte dei quattro elementi y_1, \dots, y_4 nell'insieme $\{1, \dots, 9\}$. Il numero cercato è pertanto

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

□

Esercizio 15 *L'insetto Zebrix si muove su una scacchiera colorata in maniera tradizionale, ma spostandosi soltanto verso destra o verso l'alto. Quanti percorsi possibili lo portano esattamente più a destra di cinque caselle e più in alto di tre?*

Soluzione: Ad ogni passo Zebrix può decidere se andare verso destra o verso l'alto. Due cammini sono uguali se e soltanto se hanno la stessa successione di passi verso destra e passi verso l'alto.

Se Zebrix deve effettuare un cammino che lo porti più a destra di cinque caselle, e più in alto di tre, deve effettuare un cammino che si compone di esattamente 8 passi, 3 dei quali devono essere verso l'alto. Ma allora il numero dei cammini cercati è uguale alle possibili scelte di quando effettuare i 3 passi verso l'alto nella successione di 8 passi. Il numero di cammini diversi è quindi pari al numero $\binom{8}{3} = 56$ di possibili scelte di sottoinsiemi di tre elementi da un insieme di otto. In generale il numero di cammini che portano Zebrix più a destra di m caselle e più in alto di n caselle è $\binom{m+n}{n}$. □

Esercizio 16 *Nel piano sono dati 20 punti in modo tale che le rette che ne contengono almeno due siano esattamente 179. Si dimostri che vi sono almeno 4 punti che giacciono sulla stessa retta.*

Soluzione: Supponiamo che nessuna delle rette in questione contenga 4 punti. Sia a il numero di rette che contengono esattamente 2 punti, e b il numero di rette che contengono esattamente 3 punti. Quindi abbiamo $a + b = 179$. Contiamo adesso il numero di coppie di punti. Le coppie di punti che si possono ottenere da 20 punti sono $20 \cdot 19/2 = 190$. Contiamo ora queste coppie in altro modo. Ogni retta che contiene 3 punti contiene esattamente 3 coppie, mentre una retta che contiene due punti ovviamente contiene 1 coppia. Quindi abbiamo $190 = a + 3b$. e concludiamo che $2b = 11$ che è impossibile. □